

**Eðlisfræði II:**

# **Spanstuðlar**

**Kaflí 10**

**Jón Tómas Guðmundsson**

**tumi@hi.is**

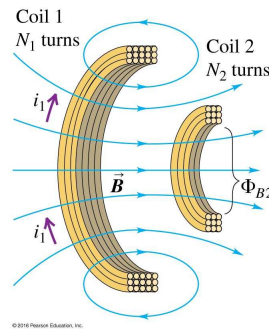
**9. vika vor 2016**

## Inngangur

- Breytilegur straumur um eina spólu spanar upp íspennu í nærliggjandi spólu
- Tengslin milli spólanna eru nefnd **gagnspan** (e. mutual inductance)
- Breytilegur straumur um spólu veldur einnig íspennu í þeirri sömu spólu og er sambandi straums og íspennu lýst með **spanstuðli** (e. inductance) spólunnar
- Ef um spóluna fer straumur, losnar um orku þegar straumurinn minnkar

# Gagnspan

**Mutual inductance:** If the current in coil 1 is changing, the changing flux through coil 2 induces an emf in coil 2.



- Gerum ráð fyrir tveimur spólum sem eru í nágrenni hvor við aðra
- Straumur sem fer um spólu 1 myndar segulsvið  $\mathbf{B}$  og þar með segulflæði um spólu 2
- Ef að straumurinn sem fer um spólu 1 breytist, þá breytist segulflæðið um spólu 2 jafnframt, og samkvæmt lögmáli Faradays spanar það íspennu í spólu 2

## Gagnspan

- Straumur  $i_1$  í spólu 1 veldur segulsviði  $\mathbf{B}$ , og sumar sviðslínurnar fara um spólu 2
- Við táknum segulflæðið um sérhvern vafning spólu 2 sem stafar frá straumnum  $i_1$  um spólu 1 með  $\Phi_{B21}$
- Segulsviðið er í réttu hlutfalli við  $i_1$ , svo að  $\Phi_{B21}$  er í réttu hlutfalli við  $i_1$
- Þegar  $i_1$  breytist þá breytist  $\Phi_{B21}$  líka, og sú breyting í segulflæði spanar íspennu  $\mathcal{E}_2$  í spólu 2, gefna með

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B21}}{dt}$$

## Gagnspan

- Ef  $N_2$  er fjöldi vafninga spólu 2 þá er

$$N_2 \Phi_{B21} = M_{21} i_1$$

þar sem hlutfallsstuðullinn  $M_{12}$  er nefndur gagnspan spólanna tveggja og  $\Phi_{B21}$  er segulflæðið um einn vafning af spólu 2

- Þar með er

$$N_2 \frac{d\Phi_{B21}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

og við getum ritað

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

sem að segir að breyting í straumnum  $i_1$  um spólu 1 spani íspennu í spólu 2 sem er í réttu hlutfalli við hraða breytingar á  $i_1$

# Gagnspan

- Einnig má rita skilgreiningu á gagnspani

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1}$$

- Gagnspanið  $M_{21}$  er fasti og er eingöngu háð geometríu spólanna (stærð, lögun, fjölda vafninga, stefnu þeirra og aðskilnaði á milli þeirra)
- Ef að segulefni er líka með þá er  $M_{21}$  einnig háð seguleiginleikum efnisins
- Þessa umræðu má endurtaka fyrir tilfallið þegar breytilegur straumur  $i_2$  í spólu 2 veldur breytilegu segulflæði  $\Phi_{B12}$  og íspennu  $\mathcal{E}_1$  í spólu 1
- Það kemur í ljós að gagnspanið  $M_{12}$  er alltaf jafnstórt  $M_{21}$  jafnvel þó svo að almennt séu spólurnar ekki eins og segulflæðið um þær ekki hið sama

# Gagnspan

- Við táknum þetta sameiginlega gagnspan með  $M$  og

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad \text{og} \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

- Neikvæða formerkið er afleiðing af lögmáli Lenz
- Gangspanið er

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B21}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{B12}}{i_2}$$

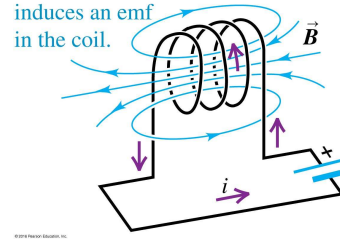
- SI einingin fyrir gagnspan er henry [H] í höfuðið á ameríska eðlisfræðingnum Joseph Henry (1797 – 1878)
- Eitt henry jafngildir einu weber á ampere

$$1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A} = 1 \text{ Vs/A} = 1 \text{ } \Omega\text{s} = 1 \text{ J/A}^2$$

⇒ Dæmi 10.1.

# Sjálfspan og spólur

**Self-inductance:** If the current  $i$  in the coil is changing, the changing flux through the coil induces an emf in the coil.



- Straumur í rás getur framkallað segulsvið sem aftur veldur segulflæði þegar straumurinn breytist
- Sérhver rás sem ber breytilegan straum hefur íspennu sem er spönuð af breytingum í segulsviði hennar sjálfrar, sjálfspönuð íspenna
- Samkvæmt lögmáli Lenz, vinnur sjálfspönuð íspenna á móti breytingunni í straumnum sem sem framkallaði íspennuna
- Fyrir spólu með  $N$  vafningum þá veldur straumurinn  $i$  segulflæðinu  $\Phi_B$  um sérhvern vafning spólunnar



## Sjálfspan og spólur

- Við skilgreinum **sjálfspan** (e. self-inductance) spólunnar  $L$  sem

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

- Ef að straumurinn  $i$  breytist þá gerir segulflæðið  $\Phi_B$  það einnig svo að

$$N \frac{d\Phi_B}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

- Ef við síðan beitum lögmáli Faraday þá er sjálfspanaða íspennan

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$$

og neikvæða formerkið er vegna lögmáls Lenz, sjálfspönuð íspennan vinnur á móti breytingu í stramnum í rásinni

⇒ Dæmi 10.2.

## Orka í segulsviði

- Það að framkalla straum í spólu krefst orku, og spóla sem ber straum geymir orku

- Augnabliksaflið er

$$P = V_{ab}i = Li \frac{di}{dt}$$

- Orkan sem spólan tekur til sín á örsmæðar tímabilinu  $dt$  er

$$dU = Pdt = Lidi$$

- Heildarorkan þegar straumurinn vex frá núll upp í lokagildið  $I$  er þá

$$U = L \int_0^I idi = \frac{1}{2}LI^2$$

## Orka í segulsviði

- Orka spólu er geymd í segulsviðinu, eins og orka þéttis er geymd í rafsviðinu á milli platnanna
- Rúmmál hrinlaga (e. toroidal) langspólu er  $V = 2\pi r A$  og sjálfspanið

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$$

og orkan sem er geymd í spólunni er

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} I^2$$

- Segulsviðið er þar með orkan eru staðbundin í rúmmálinu  $V$  sem afmarkast af vafningunum

## Orka í segulsviði

- Orkan á rúmmálseiningu eða segulorkuþéttleikinn er  $u = U/V$  eða

$$u = \frac{U}{2\pi r A} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 I^2}{(2\pi r)^2}$$

- Þetta má rita sem fall af segulsviðinu  $B$  innan spólunnar
- Hér er

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

þannig að

$$\frac{N^2 I^2}{(2\pi r)^2} = \frac{B^2}{\mu_0}$$

## Orka í segulsviði

- Við stingum þessu inn í jöfnuna að ofan sem gefur jöfnu fyrir segulorkuþéttleika í lofttæmi

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

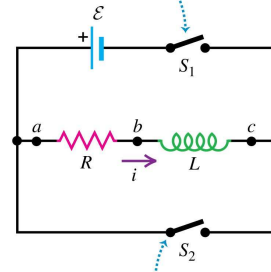
- Þegar spólan er vafin um kjarna sem hefur segulsvörunarstuðul  $\mu = K_m \mu_0$  þá skiptum við á  $\mu_0$  og  $\mu$  svo að

$$u = \frac{B^2}{2\mu}$$

⇒ Dæmi 10.3.

## $R - L$ rásir

Closing switch  $S_1$  connects the  $R$ - $L$  combination in series with a source of emf  $\mathcal{E}$ .



Closing switch  $S_2$  while opening switch  $S_1$  disconnects the combination from the source.

- Rás sem samanstendur af viðnámi, spólu og kannski spennulind er nefnd  $R - L$ -rás
- Gerum ráð fyrir að rofarnir séu opnir í upphafi og við tímann  $t = 0$  lokum við rofanum  $S_1$
- Straumurinn getur ekki breyst snögglega frá núll upp í eitthvað endanlegt gildi því að þá myndi  $di/dt$  og íspennan verða að vera óendanleg

## *R – L* rásir

- Í stað þess hækkar straumurinn með hraða sem er ákvarðaður af sjálfspani spólunnar  $L$
- Við tiltekinn tíma  $t$  eftir að rofanum hefur verið lokað er mættismunurinn yfir viðnámið

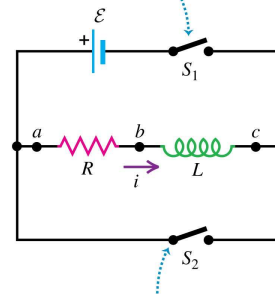
$$v_{ab} = iR$$

og yfir spóluna

$$v_{bc} = L \frac{di}{dt}$$

# $R - L$ rásir

Closing switch  $S_1$  connects the  $R-L$  combination in series with a source of emf  $\mathcal{E}$ .



Closing switch  $S_2$  while opening switch  $S_1$  disconnects the combination from the source.

- Við beitum spennulögmáli Kirchhoff

$$\mathcal{E} - iR - L \frac{di}{dt} = 0$$

sem við leysum fyrir  $di/dt$  og ritum

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - iR}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}i$$



## *R – L rásir*

- Á augnablikinu sem að rofinn lokast er  $i = 0$  og ekkert spennufall yfir viðnámið og hraði breytingar á straumnum

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{initial}} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

- Því stærri sem spólan er því hægar vex straumurinn
- Með hækkandi straum stækkar líka þátturinn  $(R/L)i$  og aukningarhraði straumsins fellur

## *R – L* rásir

- Þetta þýðir að straumurinn nálgast loka gildi sitt, æstæða gildið  $I$ , þá er

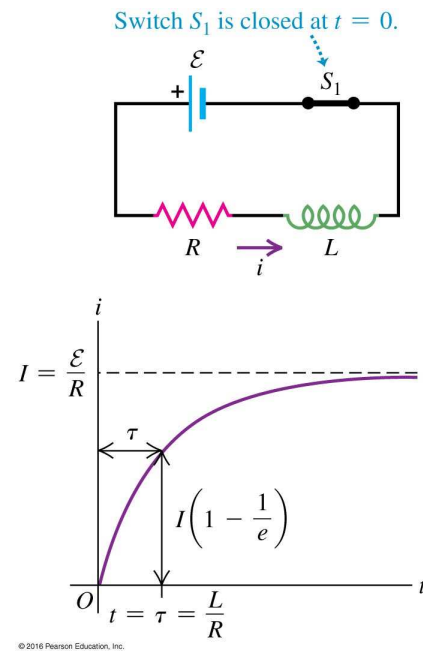
$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{final}} = 0 = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}I$$

og

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

- Lokastraumurinn er óháður spani spólunnar  $L$

## $R - L$ rásir



- Myndin sýnir hegðun straumsins sem fall af tíma
- Við getum ritað

$$\frac{di}{i - (\mathcal{E}/R)} = -\frac{R}{L} dt$$

## $R - L$ rásir

- Við tegrum

$$\int_0^I \frac{di'}{i' - (\mathcal{E}/R)} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt'$$

svo að

$$\ln \left( \frac{i - (\mathcal{E}/R)}{-(\mathcal{E}/R)} \right) = -\frac{R}{L}t$$

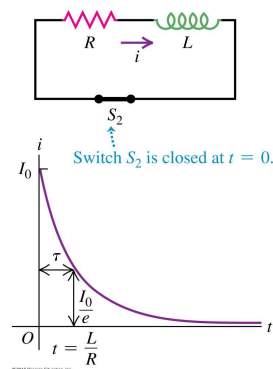
og leysum fyrir strauminn

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{L} \left( 1 - \exp \left( -\frac{R}{L}t \right) \right)$$

- Stærðin  $L/R$  er mælikvarði á það hve hratt straumurinn eykst að lokagildi sínu og nefndur tímafasti rásarinnar

$$\tau = \frac{L}{R}$$

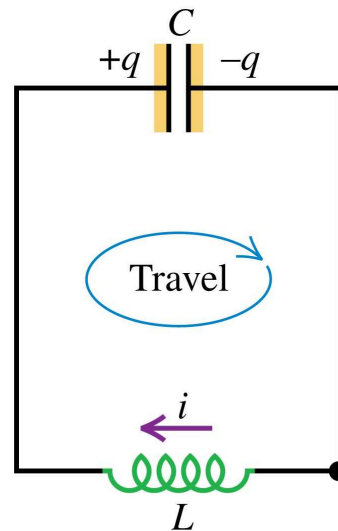
## $R - L$ rásir



- Gerum nú ráð fyrir að rofinn  $S_1$  sé búinn að vera lokaður lengi og að straumurinn í rásinni sé  $I_0$
- Við setjum tímann nú  $t = 0$  og lokum rofanum  $S_2$  og opnum rofann  $S_1$
- Straumurinn fellur núna samkvæmt

$$i(t) = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

## $L - C$ rásir



- Rás sem samanstendur af spólu og þétti einkennist af sveiflum í straum og hleðslu
- Ef við beitum spennulögmáli Kirchhoff fæst

$$-L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

## *L – C* rásir

- Þar sem  $i = dq/dt$  þá er  $di/dt = dq^2/d^2t$  þannig að

$$\frac{dq^2}{d^2t} + \frac{q}{LC} = 0$$

sem hefur lausn á forminu

$$q(t) = Q \cos(\omega t + \phi)$$

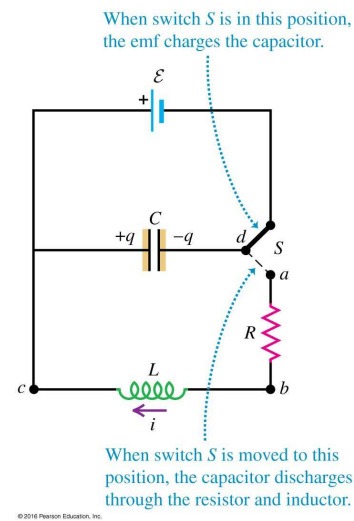
og horntíðnin  $\omega$  er gefin með

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

- Straumurinn er þá

$$i(t) = -\omega Q \sin(\omega t + \phi)$$

## $L - R - C$ rásir



- Gerum nú ráð fyrir að spóla, þéttir og viðnám séu raðtengd eins og sést á myndinni
- Beitum nú lögmáli Kirchhoff á rásina

$$-iR - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$



## *L – R – C* rásir

- Notum að  $i = dq/dt$  þá er

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

- Þessi jafna hefur þrjár gerðir af lausnum
  - undirdempuð lausn (lítið  $R$ )
  - markdempuð (stærri  $R$ )
  - yfirdempuð (stórt  $R$ )

## *L – R – C* rásir

- Þegar  $R^2 < 4L/C$  (yfirdempað) hefur lausnin formið

$$q = A \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + \phi\right)$$

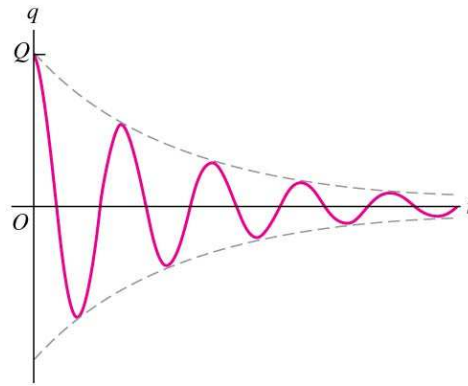
þar sem  $A$  og  $\phi$  eru fastar

- Horntíðni dempuðu sveiflunnar er

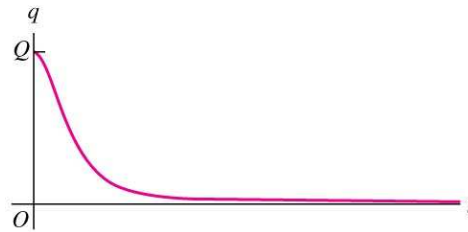
$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

# $L - R - C$ rásir

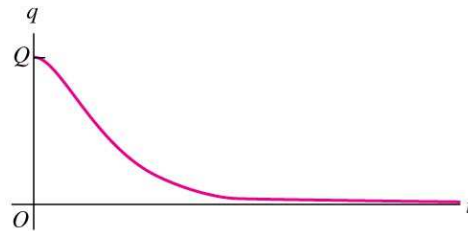
(a) Underdamped circuit (small resistance  $R$ )



(b) Critically damped circuit (larger resistance  $R$ )



(c) Overdamped circuit (very large resistance  $R$ )



© 2016 Pearson Education, Inc.

## *L – R – C* rásir

$\implies$  Dæmi 10.4.

$\implies$  Dæmi 10.5.

$\implies$  Dæmi 10.6.

## Frekari upplýsingar

- Þessi kafli er að mestu byggður á kafla 30 hjá Young and Freedman (2015).

## Heimildir

Young, H. D. and R. A. Freedman (2015). *University Physics with Modern Physics* (14 ed.). Harlow, England: Pearson Education.