

Eðlisfræði II:

Kjarneðlisfræði

Kaflí 15

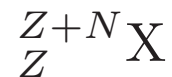
Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

14. vika vor 2016

Grundvallar agnir

- Kjarni frumeinda samanstendur at **róteindum** (e. proton) og **nifteindum** (e. neutrons)
- Heildarfjöldi róteinda í kjarnanum er **sætistala** (e. atomic number) frumeindarinnar og er táknuð með Z
- Fjöldi nifteinda í kjarnanum er **nifteinda talan** (e. neutron number) sem er táknuð með N
- Heildarfjöldi **kjarneinda** (e. nucleaons), það er róteinda og nifteinda í kjarna er þá $Z + N = A$, þar sem A er nefnt **massatala** frumeindarinnar (e. atomic mass number)
- Samsætur eru táknaðar með



Massi frumeinda og sameinda

- Byggingareiningar kjarnans eru róteindir og nifteindir
- Í hlutlausu atómi er ein rafeind fyrir hverja róteind
- Massar þessara agna eru
 - $m_p = 1.007276 \text{ u} = 1.672622 \times 10^{-27} \text{ kg}$
 - $m_n = 1.008665 \text{ u} = 1.674927 \times 10^{-27} \text{ kg}$
 - $m_e = 0.000548580 \text{ u} = 9.10938 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Hér er u eða amu atómmassaeining eða massaeining frumeindar (e. atomic mass unit)

$$1 \text{ u} = 1.660538921(73) \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Massi frumeinda og sameinda

TABLE 43.1 Compositions of Some Common Nuclides

Z = atomic number (number of protons)

N = neutron number

$A = Z + N$ = mass number (total number of nucleons)

Nucleus	Z	N	$A = Z + N$
${}^1_1\text{H}$	1	0	1
${}^2_1\text{H}$	1	1	2
${}^4_2\text{He}$	2	2	4
${}^6_3\text{Li}$	3	3	6
${}^7_3\text{Li}$	3	4	7
${}^9_4\text{Be}$	4	5	9
${}^{10}_5\text{B}$	5	5	10
${}^{11}_5\text{B}$	5	6	11
${}^{12}_6\text{C}$	6	6	12
${}^{13}_6\text{C}$	6	7	13
${}^{14}_7\text{N}$	7	7	14
${}^{16}_8\text{O}$	8	8	16
${}^{23}_{11}\text{Na}$	11	12	23
${}^{65}_{29}\text{Cu}$	29	36	65
${}^{200}_{80}\text{Hg}$	80	120	200
${}^{235}_{92}\text{U}$	92	143	235
${}^{238}_{92}\text{U}$	92	146	238

© 2016 Pearson Education, Inc.

Massi frumeinda og sameinda

- **Frumeindamassi** (e. atomic weight) frumeindar er skilgreindur sem hlutfall massa hlutlausrar frumeindar og massa hlutlausrar ^{12}C frumeindar, þar sem gert er ráð fyrir að frumeindamassi ^{12}C sé nákvæmlega 12
- Látum $m(^A Z)$ vera massa hlutlausrar frumeindar sem er táknuð með $^A Z$ og $m(^{12}\text{C})$ er massi hlutlauss ^{12}C
- Þá er frumeindamassi $^A Z$, $M(^A Z)$ gefinn með

$$M(^A Z) = 12 \frac{m(^A Z)}{m(^{12}\text{C})}$$

Massi frumeinda og sameinda

- Ef γ_i er samsætuhlutfall i -tu samsætunnar sem hefur frumeindamassann M_i þá er frumeindamassi frumeindarinnar

$$M = \sum_i \frac{\gamma_i M_i}{100}$$

- Heildarmassi sameindar í hlutfalli við massa hlutlauss ^{12}C er nefndur **sameindamassi** (e. molecular weight)
- Gramma frumeindamassi og gramma sameindamassi eru skilgreindir sem það magn efnis sem hefur massa í grömmum, sem er jafn frumeindamassa eða sameindamassa efnisins. Þetta magn efnis er einnig nefnt mól
- Massi einstakrar frumeindar eða sameindar er reiknaður með því að nota Avogadros töluna

Massi frumeinda og sameinda

- Eitt mól af ^{12}C hefur massa 12 g og inniheldur N_A frumeindir svo að

$$m(^{12}\text{C}) = \frac{12}{0.602217 \times 10^{24}} = 1.99264 \times 10^{-23} \text{ g} = 12 \text{ amu}$$

þar sem

$$1 \text{ amu} = \frac{1}{12} \times 1.999264 \times 10^{-23} \text{ g} = 1.66 \times 10^{-24} \text{ g}$$

og

$$m(^A\text{Z}) = M(^A\text{Z}) \times \text{amu}$$

Massi frumeinda og sameinda

TABLE 43.2 Neutral Atomic Masses for Some Light Nuclides

Element and Isotope	Atomic Number, Z	Neutron Number, N	Atomic Mass (u)	Mass Number, A
Hydrogen (${}^1_1\text{H}$)	1	0	1.007825	1
Deuterium (${}^2_1\text{H}$)	1	1	2.014102	2
Tritium (${}^3_1\text{H}$)	1	2	3.016049	3
Helium (${}^3_2\text{He}$)	2	1	3.016029	3
Helium (${}^4_2\text{He}$)	2	2	4.002603	4
Lithium (${}^6_3\text{Li}$)	3	3	6.015123	6
Lithium (${}^7_3\text{Li}$)	3	4	7.016005	7
Beryllium (${}^9_4\text{Be}$)	4	5	9.012182	9
Boron (${}^{10}_5\text{B}$)	5	5	10.012937	10
Boron (${}^{11}_5\text{B}$)	5	6	11.009305	11
Carbon (${}^{12}_6\text{C}$)	6	6	12.000000	12
Carbon (${}^{13}_6\text{C}$)	6	7	13.003355	13
Nitrogen (${}^{14}_7\text{N}$)	7	7	14.003074	14
Nitrogen (${}^{15}_7\text{N}$)	7	8	15.000109	15
Oxygen (${}^{16}_8\text{O}$)	8	8	15.994915	16
Oxygen (${}^{17}_8\text{O}$)	8	9	16.999132	17
Oxygen (${}^{18}_8\text{O}$)	8	10	17.999161	18

Source: G. Audi, A. H. Wapstra, and C. Thibault, *Nuclear Physics* **A729**, 337 (2003).

© 2016 Pearson Education, Inc.

Radíi frumeinda og kjarna

- Kjarninn eða frumeindin hafa ekki skörp eða vel skilgreind ytri mörk
- Fyrsta nálgun er það að gera ráð fyrir að kjarninn sé kúla með radía sem gefinn með jöfnunni

$$R = 1.25 \times 10^{-13} A^{1/3}$$

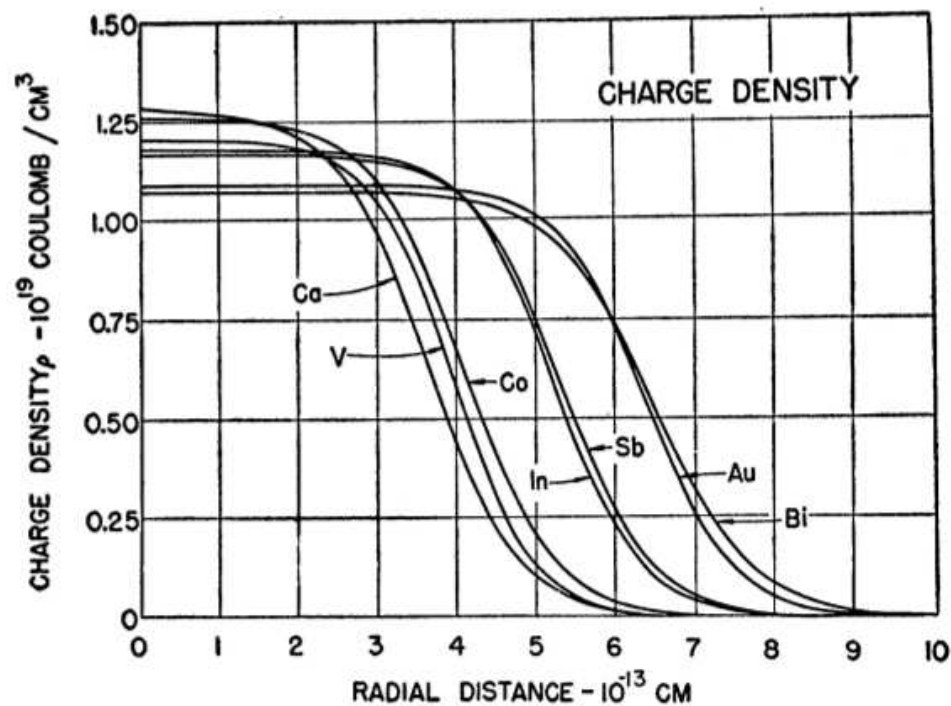
þar sem R er í centimetrum og A er massatala frumeindarinnar

- Þetta segir að

$$V \propto A$$

og að hlutfallið A/V , fjöldi kjarneinda á rúmmálseiningu, er fasti fyrir alla kjarna

Radíi frumeinda og kjarna



Frá Hofstadter (1956)

- Radíar nokkurra kjarna samkvæmt Fermi líkaninu

Radíi frumeinda og kjarna

- Coulomb orkan sem er einsleit í hlaðinni kúlu af radía R er

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

þar sem Q er heildarhleðslan í kúlu.

- Fjöldi kjarneinda á rúmmálseiningu er

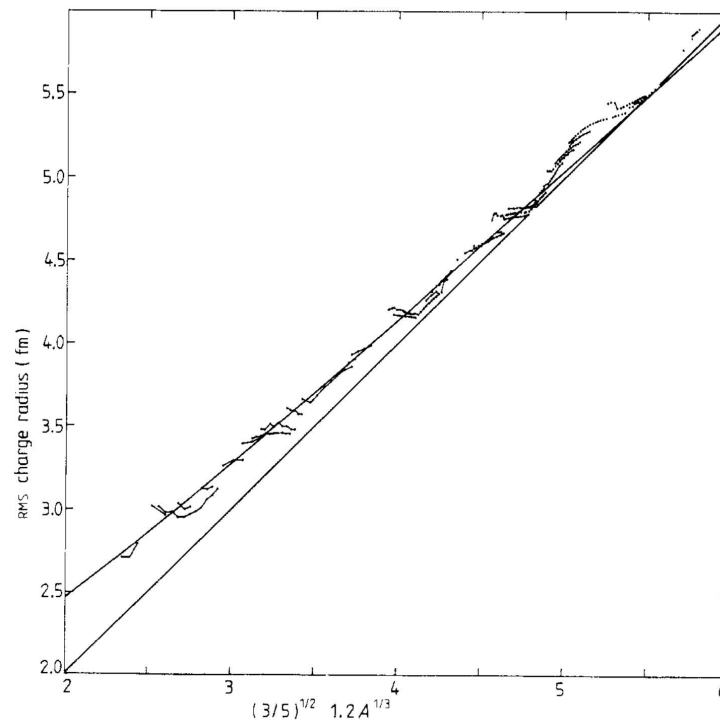
$$\frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} \sim \text{fasti}$$

eða

$$R = R_0 A^{1/3}$$

og $R_0 \approx 1.2 \text{ fm}$

Radíi frumeinda og kjarna



Frá Brown et al. (1984)

- Radíi kjarna ákvarðaður með tilraunum, sem fall af $(3/5)^{1/2} 1.2A^{1/3}$

Massi og orka

- Einstein hélt því fram að

$$E_{\text{rest}} = m_0 c^2$$

- Fyrir hlut á hreyfingu, þá eykst massi hans með tilliti til athuganda samkvæmt

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

þar sem m_0 er hvíldarmassinn (kyrrstöðumassinn) og v er hraðinn

- Heildarorka agnar er gefinn með

$$E_{\text{total}} = mc^2$$

Massi og orka

- Hreyfiorka agnar er þá

$$E = E_{\text{total}} - E_{\text{rest}} = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right]$$

og þegar $v \ll c$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{4} \frac{v^4}{c^2} \approx \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

svo að

$$E = m_0c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right] \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Massi og orka

- Ljóseindir ferðast eingöngu á ljóshraða og heildarorka þeirra er gefin með

$$E = h\nu$$

með

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

- Bylgjulengd λ agnar sem hefur skriðþunga p er þá

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

þar sem

$$p = mv$$

Massi og orka

- Líka má rita

$$p = \sqrt{2m_0E}$$

svo að

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0E}} = \frac{2.86 \times 10^{-9}}{\sqrt{E}}$$

þar sem λ er í cm og E er hreyfiorka nifteindar í eV

- Í afstæðilega tilfellinu

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_{\text{total}}^2 - E_{\text{rest}}^2}$$

svo að

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_{\text{total}}^2 - E_{\text{rest}}^2}}$$

Massi og orka

- Þegar hvíðarmassinn er núll þá er

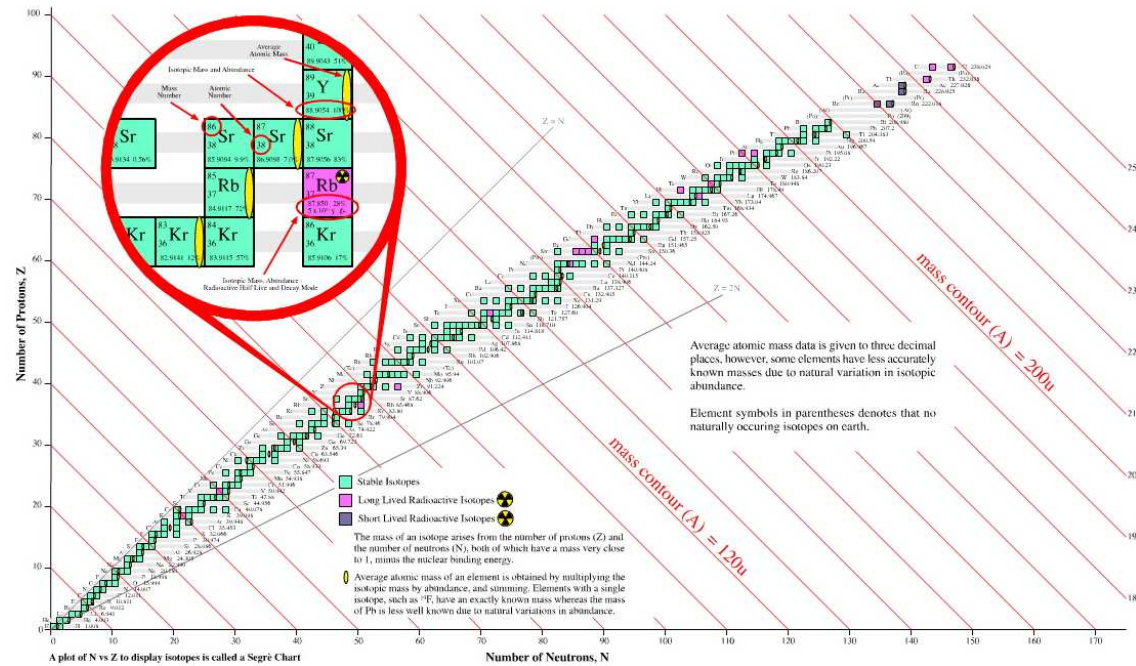
$$p = \frac{E}{c}$$

og

$$\lambda = \frac{1.24 \times 10^{-4}}{E}$$

þar sem λ er í centimetrum og E er í eV

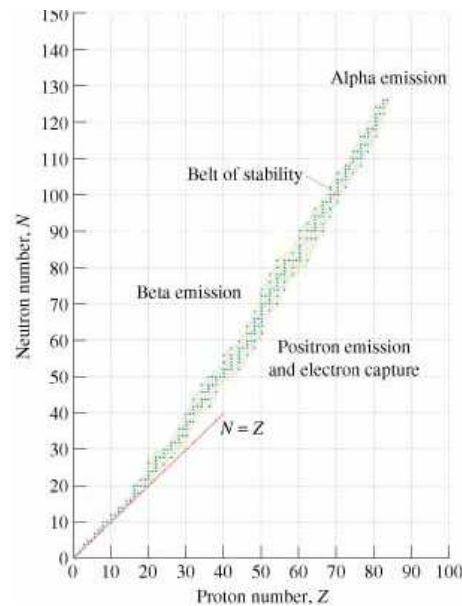
Stöðugleiki kjarna og hrörnun



Frá <http://www.meta-synthesis.com/>

- Graf sem sýnir þekktu kjarna sem fall af frumeindatölu og nifteindatölu er þekkt sem **Segré graf** eða graf kjarneinda

Stöðugleiki kjarna og hrörnun

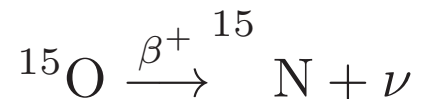


Frá <http://www.chem.latech.edu/~upali/chem481/Chem481c1.htm>

- Það eru fleiri nifteindir en róteindir í kjörnum þar sem Z er stærra en um 20, það er fyrir frumeindir handan kalsíns (Ca) í lotukerfinu
- Þessar auka nifteindir eru nauðsynlegar fyrir stöðugleika þyngri kjarna

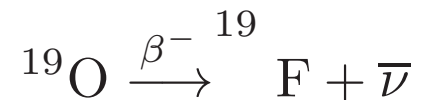
Stöðugleiki kjarna og hrörnun

- Kjarnar þar sem nifteindir skortir gangast undir β^+ hrörnun
- Í þessu ferli er einni róteind í kjarnanum umbreytt í nifteind og jáeind (e. positron) og fiseind (e. neutrino) er útgeislað
- Fyrir ^{15}O er þetta ritað



Stöðugleiki kjarna og hrörnun

- Kjarni sem hefur umfram nifteindir hrörnar með β^- -hrörnun, og geislar út rafeind og andfiseind
- Í þessu tilfalli breytist nifteindin í róteind og freindatalan eykst um eina einingu
- Fyrir ^{19}O er þetta ritað

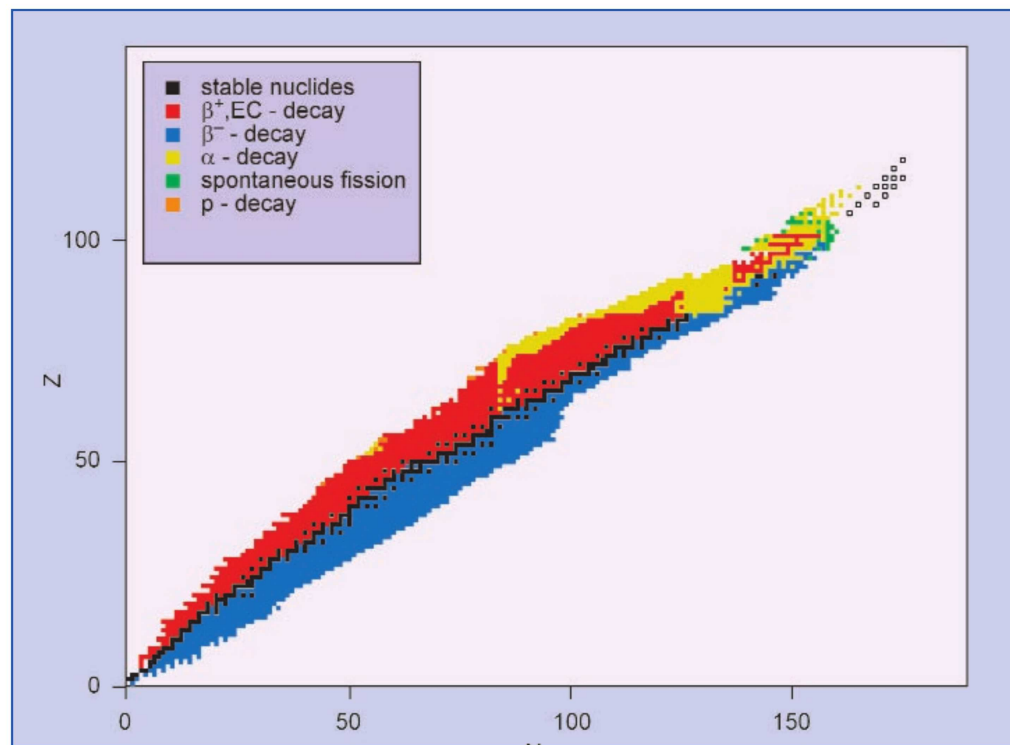


- Hafa ber í huga að við bæði β^+ -hrörnun og β^- -hrörnun helst massatala frumeindarinnar hin sama.

Stöðugleiki kjarna og hrörnun

- Kjarni þar sem upp á vantar nifteindir getur einnig aukið fjölda nifteinda með **rafeindarhremmingu** (e. electron capture)
- Rafeind af frumeindinni víxlverkar þá við eina róteind kjarnans og nifteind er mynduð með sameiningu
- Þetta veldur því að eyða kemur fram í rafeindaskýinu, sem síðan er fyllt af annarri rafeind – leiðir til útgeislun γ -geisla
- Enn ein leið er útgeislun á α -ögn
- α -ögn er mjög stöðugur kjarni samsætunnar ${}^4\text{He}$

Stöðugleiki kjarna og hrörnun



Frá Mackintosh et al. (2001)

Geislavirkni reikningar

- Hrörnunarfastinn er táknaður með λ
- Ef við tímenn t eru $n(t)$ frumeindir sem ekki hafa hrörnað, þá hrörna $\lambda n(t)dt$ frumeindir á tímabilinu dt á milli t og $t + dt$
- Þetta segir að tíðni hrörnunar frumeinda í sýni eru $\lambda n(t)$ sundranir á tímaeiningu
- Þessi hrörnunartíðni er nefnd **virgni** (e. activity) sýnisins og er táknuð með α
- Virgni við tímenn t er gefin með

$$\alpha(t) = \lambda n(t)$$

og er sögulega gefin í einingunni curies þar sem eitt curie er táknað með Ci og er skilgreint sem 3.7×10^{10} sundranir á sekúndu

Geislavirkni reikningar

- Í SI einingum þá er notuð einingin becquerel, Bq, sem er gefið í sundrunum á sekúndu

$$1 \text{ Bq} = 2.703 \times 10^{-11} \text{ Ci}$$

- Þar sem $\lambda n(t)dt$ kjarnar hrörna á tímabilinu dt fylgir fækkun í fjölda óhrörnaðra kjarna í sýninu á tímabilinu dt er

$$-dn(t) = \lambda n(t)dt$$

- Þessa jöfnu má tegra til að finna

$$n(t) = n_0 \exp(-\lambda t)$$

og að virknin er

$$\alpha(t) = \alpha_0 \exp(-\lambda t)$$

Geislavirkni reikningar

- Tíminn sem það tekur virknina að falla um helming er þekkt sem helmingunartími

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

þannig að

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$$

Geislavirkni reikningar

- Ef kjarntegundin (e. nuclide) er framleiddur með föstum hraða R frumeindir/s þá er breyting í fjölda frumeinda kjarntegundarinnar á tímabilinu dt gefin með

$$dn = -\lambda n dt + R dt$$

og

$$n(t) = n_0 \exp(-\lambda t) + \frac{R}{\lambda} (1 - \exp(-\lambda t))$$

og virknin

$$\alpha(t) = \alpha_0 \exp(-\lambda t) + R (1 - \exp(-\lambda t))$$

⇒ Dæmi 15.1.

⇒ Dæmi 15.2.

Kjarnahvörf

- Í hvarfinu



er nægjanlegt að skoða fjögur grundvallarlögmál

- varðveisla kjarneinda
- varðveisla hleðslu
- varðveisla skriðþunga
- varðveisla orku

- Með varðveislunni fylgir að

$$E_a + E_b + M_a c^2 + M_b c^2 = E_c + E_d + M_c c^2 + M_d c^2$$

Kjarnahvörf

- Þetta má rita

$$(E_c + E_d) - (E_a + E_b) = [(M_a + M_b) - (M_c + M_d)] c^2$$

eða

$$Q = [(M_a + M_b) - (M_c + M_d)] c^2$$

- Þegar Q er jákvæð þá er aukning í hreyfiorku agnanna. Slík hvörf eru sögð **útverminn** eða **varmagæf** (e. exothermic)
- Þegar Q er neikvætt er hvarfið sagt **innvermið** eða **varmadrægt** (e. endothermic)

⇒ Dæmi 15.3.

Kjarnahvörf

- Massi allra kjarna er aðeins minni en summa massa nifteinda or róteinda sem kjarninn samanstendur af
- Þessi massarýrð fyrir tiltekinn kjarna er þá

$$\Delta = ZM_p + NM_n - M_A$$

- Þegar Δ er gefið í orkueiningu svarar það til þeirrar orku sem nauðsynleg er til að brjóta kjarnan upp í kjarneindir sínar

Kjarnahvörf

- Þetta segir

$$Q = [\text{BE}(c) + \text{BE}(d)] - [\text{BE}(a) + \text{BE}(b)]$$

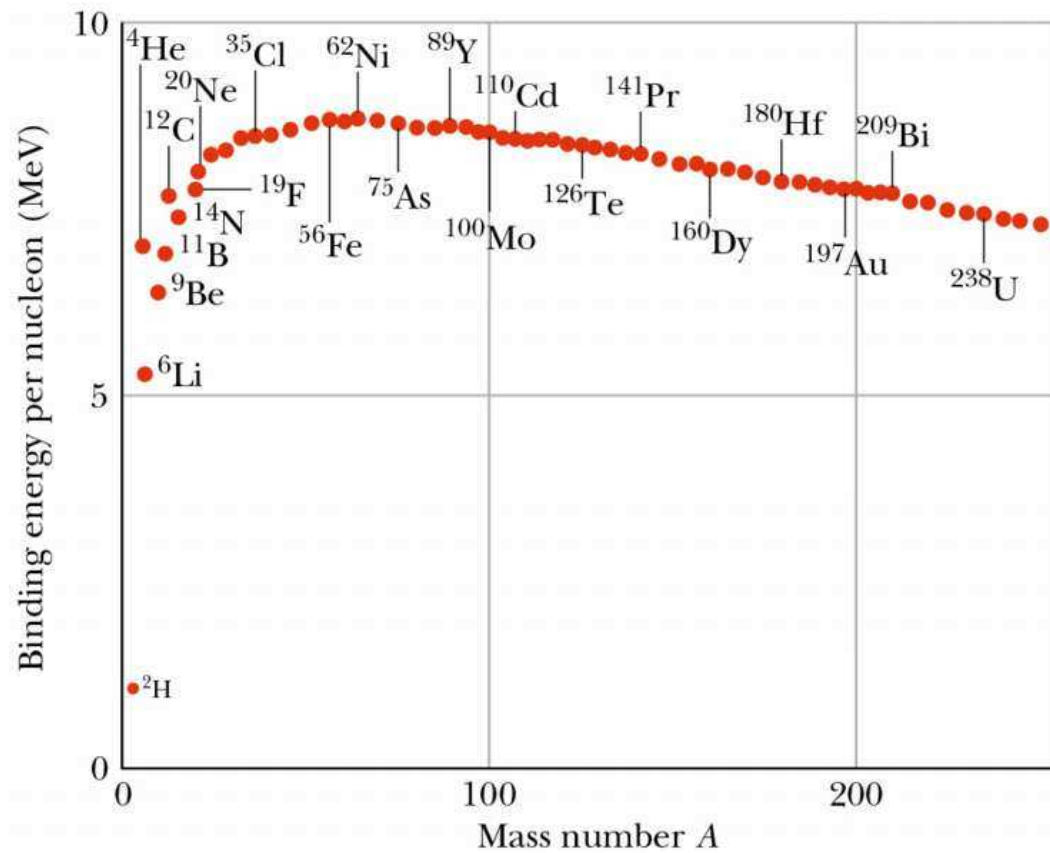
og aðskilnaðar orkan

$$E_s = [M_n + M(^{A-1}Z) - M(^AZ)] c^2$$

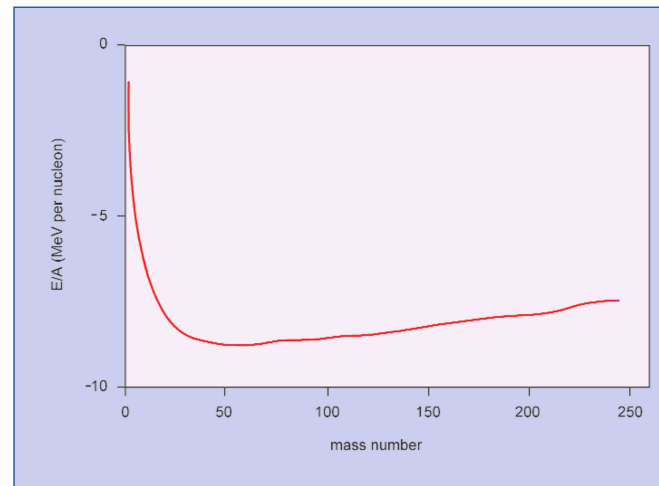
sem er orkan sem er nægjanleg til að fjarlægja nifteind frá kjarnanum

⇒ Dæmi 15.4.

Kjarnahvörf



Kjarnahvörf



Frá Mackintosh et al. (2001)

- Almennt má segja að því meiri sem munur er á fjölda nifteinda og róteinda er í kjarnanum, því styttri er helmingunartíminn
- Því meiri sem útgeisluð orka er því hraðar gengur útgeislunin og helmingunartíminn er styttri
- Stöðugustu kjarnarnir eru við botn ferilsins

Dropalíkanið

- Eitt fyrsta líkanið af kjarnanum var sett fram af Bohr 1935
- Það var byggt á hinum skammdrægu kjarnakröftum, ásamt með rúmmálum kjarnans og bindiorkum
- Kjarneindir víxlverka sterklega milli næstu granna eins og sameindir í vatnsdropa – **dropalíkanið**
- Líkanið byggir á vökva-dropa en inniheldur tvö atriði frá skammtafræði
- Annar þátturinn er ósamhverfu orkan, sem er hærri ef jafn mikið er af nifteindum og róteindum
- Hinn þátturinn er pörunarorkan, sem leitar í uppbyggingu þar sem tvær fermieindir eru paraðar

Dropalíkanið

- Massajafna Bethe og Weizsäcker gefur bindiorkuna

$$BE(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A)$$

- Stuðlarnir a_i eru valdir þannig að þeir gefi góða nálgun á þekktum bindiorku gildum

Dropalíkanið

- Góð gildi eru

$$a_v = 15.753 \text{ MeV}$$

$$a_s = 17.804 \text{ MeV}$$

$$a_c = 0.7104 \text{ MeV}$$

$$a_a = 23.69 \text{ MeV}$$

og

$$\delta(A) = \begin{cases} 33.6A^{-3/4} & \text{ef } N \text{ og } Z \text{ eru jafnar} \\ -33.6A^{-3/4} & \text{ef } N \text{ og } Z \text{ eru odda} \\ 0 & \text{ef } A = N + Z \text{ er odda} \end{cases}$$

- Töluleg gildi á þessum stuðlum verður að ákvarða empirically (nema á

a_c

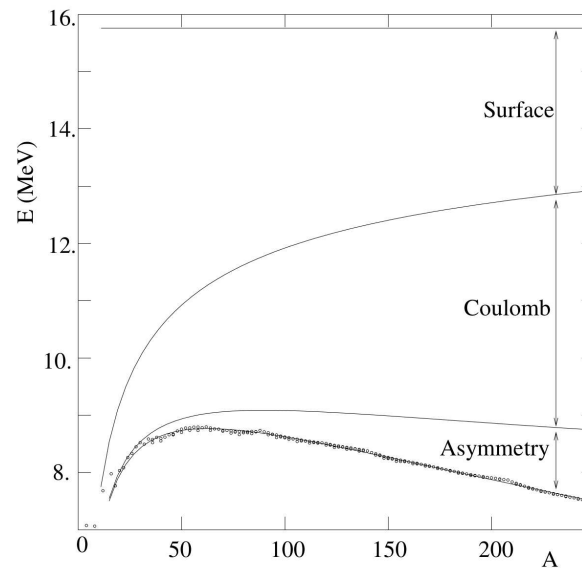
Dropalíkanið

- Fyrsti liðurinn er rúmmálsliðurinn sem endurspeglar víxlverkun næstu granna, og myndi einn og sér gefa fasta bindiorku fyrir hverja kjarneind sem er $BE/A \sim 16 \text{ MeV}$
- Liðurinn a_s , sem lækkar bindiorkuna, er yfirborðsliðurinn
 - Innri kjarneindir finna stefnusnauða víxlverkun en kjarneindir sem eru nærri yfirborði kjarnans finna aðeins krafta innan frá. Þess vegna er yfirborðsspennu liður, sem er í réttu hlutfalli við yfirborðsflatarmálið $4\pi R^2 \sim A^{2/3}$
- Liðurinn með a_c er Coulomb liðurinn fyrir róteindir, í réttu hlutfalli við Q^2/R , það er $\sim Z^2/A^{1/3}$
 - Þennan lið er hægt að reikna. Hann er minni en kjarna liðirnir fyrir lítil gildi á Z .

Dropalíkanið

- Ósamhverfu liðurinn a_a tekur samhverfu milli nifteinda og róteinda fram yfir (innspuni (e. isospin)). Ef ekki eru fyrir hendi rafkraftar er $Z = N$ orkulega hagstæðari
- Liðurinn $\delta(A)$ er pörunarliðurinn
- Vegna Coulomb liðarins og samhverfu liðarins er fyrir sérhvert gildi á A hægt að finna hæstu bindiorku kjarna með því að setja $\partial BE / \partial Z = 0$
- Við sjáum síðar að mesta binding er þegar $Z = N = A/2$ fyrir lítil A þar sem samhverfuliðurinn er ráðandi en Coulomb liðurinn leiðir til að $N > Z$ er hagstæðara fyrir stór A

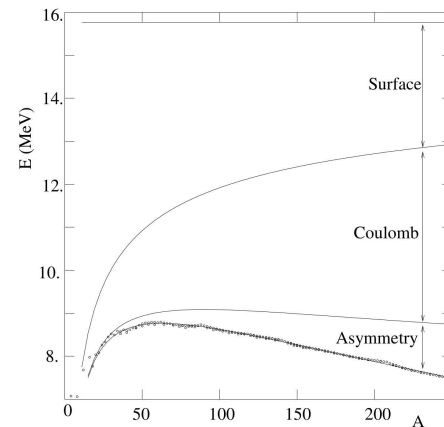
Dropalíkanið



Frá Basdevant et al. (2005)

- Reiknuð bindiorka er sýnd sem fall af A ásamt mældri bindiorku
- Myndin sýnir eingöngu jafn-odda kjarna þar sem pörunarliðurinn hverfur

Dropalíkanið



Frá Basdevant et al. (2005)

- Myndin sýnir líka framlag mismunandi liða í massajöfnunni
- Við sjáum að þegar A eykst þá minnkar vægi yfirborðspáttarins en Coulomb þátturinn eykur vægi sitt
- Bindiorkan tekur hæsta gildi um $A \sim 56$ sem svarar til jafn- Z samsætu járns og nikkels

Dropalíkanið

- Léttir kjarnar geta runnið saman í útvermnum hvörfum þar til þeir ná fastar bundnum kjörnum við $A \sim 56$
- Fyrir stór A er það aukið framlag Coulomb liðarins sem lækkar bindiorkuna
- Þetta útskýrir hvers vegna þyngri kjarnar losa orku í sundrun eða með α -hrörnun
- Þetta á sér stað aðallega fyrir mjög þunga kjarna $A > 212$ vegna þess að líftíminn er almennt of langur fyrir smærri kjarna
- Fyrir jafna – odda kjarna, er bindiorkan fleygbogi í Z fyrir gefið A

Frekari upplýsingar

- Þessi kafli er að mestu byggður á kafla 2 hjá Lamarsh (1983) og að einhverju leyti á kafla 3 hjá Krane (1988). Sambærilega umfjöllun er að finna í kafla 43 hjá Young and Freedman (2015).

Heimildir

Basdevant, J.-L., J. Rich, and M. Spiro (2005). *Fundamentals in Nuclear Physics: From Nuclear Structure to Cosmology*. New York: Springer Verlag.

Brown, B. A., C. R. Bronk, and P. E. Hodgson (1984). Systematics of nuclear RMS charge radii. *Journal of Physics G: Nuclear Physics* 10(12), 1683–1701.

Hofstadter, R. (1956). Electron scattering and nuclear structure. *Reviews of Modern Physics* 28(3), 214–254.

Krane, K. S. (1988). *Introductory Nuclear Physics*. New York: John Wiley & Sons.

Lamarsh, J. R. (1983). *Introduction to Nuclear Engineering* (2 ed.). Reading, Massachusetts: Addison Wesley.

Mackintosh, R., J. Al-Khalili, B. Jonson, and T. Pena (2001). *Nucleus: A Trip Into the Heart of Matter*. Baltimore, Maryland: The Johns Hopkins University Press.

Young, H. D. and R. A. Freedman (2015). *University Physics with Modern Physics* (14 ed.). Harlow, England: Pearson Education.