Eðlisfræði II:

Rafmætti

Kafli 3

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

3. vika vor 2016

Rafmætti

- Þegar hlaðin ögn ferðast í rafsviði, þá leiðir sviðið til krafts sem framkvæmir vinnu á ögninni
- Þessari vinnu má lýsa með **rafstöðuorku**
- Við munum nota hugtakið **rafstöðumætti** eða bara **mætti** til að lýsa rafstöðuorkunni
- Í rafrásum er mættismunurinn frá einum punkti til annars oftast kallaður **spenna**

Rafstöðuorka

- Ef kraftur $\mathbf{F}$ verkar á ögn sem ferðast frá a til b þá er vinnan sem framkvæmd er

$$W_{a\to b} = \int_a^b \mathbf{F}\mathrm{d}\ell = \int_a^b F\cos\phi\,\mathrm{d}\ell$$

  þar sem $\mathrm{d}\ell$ er vigur í stefnu a til b

- Þyngdarkraftur er geyminn kraftur (e. conservative) sem þýðir að sama vinna er framkvæmd óháð leiðinni sem farin er

- Jafnframt er vinnan sem framkvæmd er jöfn breytingunni sem verður á stöðuorku agnarinnaar

$$W_{a\to b} = U_\mathrm{a} - U_\mathrm{b} = -(U_\mathrm{b} - U_\mathrm{a}) = -\Delta U$$

- Þegar $W_{a\to b} > 0$ er $U_\mathrm{a} > U_\mathrm{b}$

Rafstöðuorka

- Þegar $W_{a\to b}$ er jákvæð segir það að $U_{\rm a}$ er stærra en $U_{\rm b}$, þá er ΔU neikvætt og stöðuorkan minnkar
- Einnig er að breyting í hreyfiorku

$$\Delta K = K_{\rm b} - K_{\rm a}$$

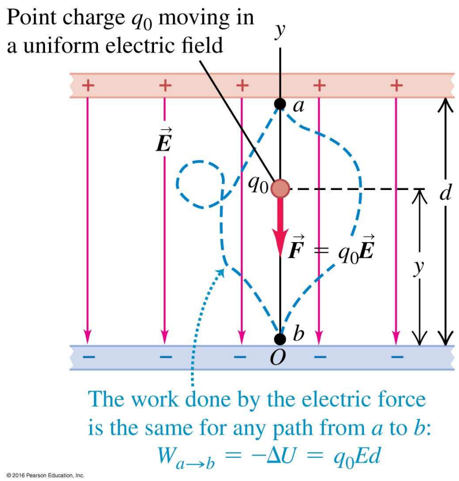
við færslu svarar til heildarvinnu sem framkvæmd er á hleðslunni, og ef krafturinn er geyminn þá er

$$K_{\rm b} - K_{\rm a} = -(U_{\rm b} - U_{\rm a})$$

sem oft er ritað

$$K_{\rm a} + U_{\rm a} = K_{\rm b} + U_{\rm b}$$

Rafstöðuorka



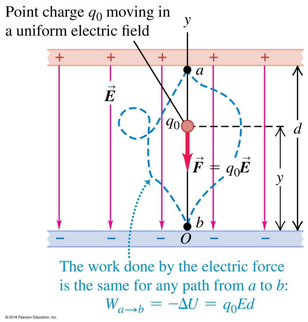
- Gerum ráð fyrir tveimur samsíða málmplötum sem eu hlaðnar þannig að á milli þeirra er einsleitt rafsvið E

- Þetta svið veldur krafti

$$F = q_0 E$$

á jákvæða tilraunahleðslu q_0

Rafstöðuorka



- Þegar hleðslan ferðast niður á við sem nemur vegalengdinni d frá punktinum a til punktsins b, þá er krafturinn fasti og óháður staðsetningu
- Vinnan sem framkvæmd er af rafsviðinu er þá

$$W_{a\to b} = Fd = q_0Ed$$

- Þessi vinna er jákvæð, þar sem krafturinn er í sömu stefnu og færsla agnarinnar

Rafstöðuorka

- $y-$þáttur rafkraftsins er þá

$$F_y = -q_0 E$$

og það eru engir þættir í $x-$ og $z-$stefnu

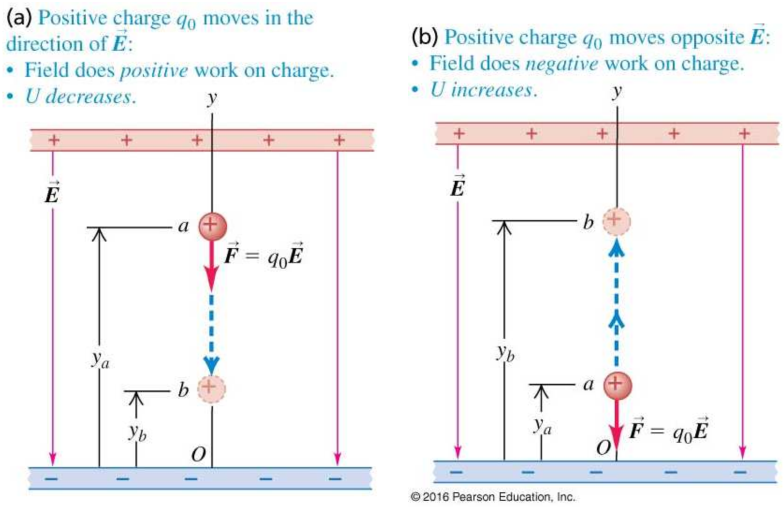
- Við getum táknað þessa vinnu með mættisorkufallinu U

$$U = q_0 E y$$

- Þegar tilraunaögnin ferðast frá hæðinni y_{a} til y_{b}, þá er vinnan sem er framkvæmd á hleðsluna af sviðinu

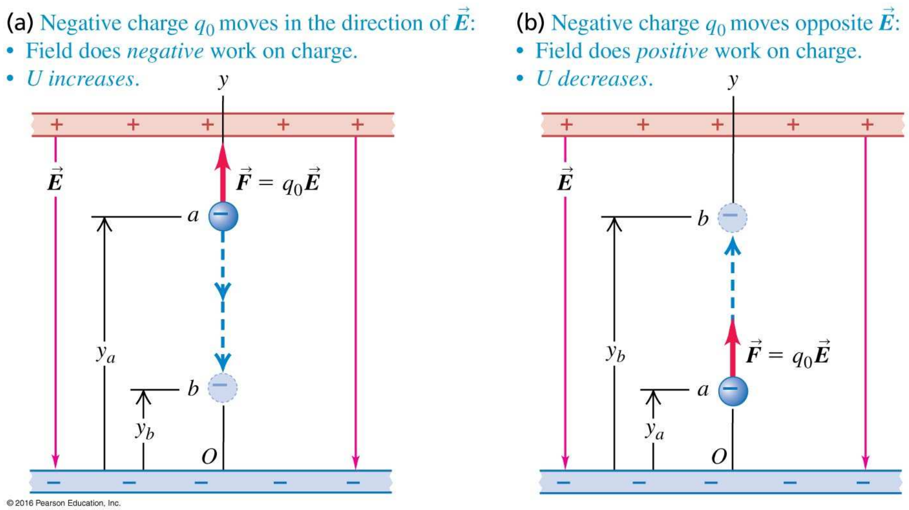
$$W_{a\to b} = -\Delta U = -(U_{\mathrm{b}} - U_{\mathrm{a}}) = -(q_0 E y_{\mathrm{b}} - q_0 E y_{\mathrm{a}}) = q_0 E (y_{\mathrm{a}} - y_{\mathrm{b}})$$

Rafstöðuorka



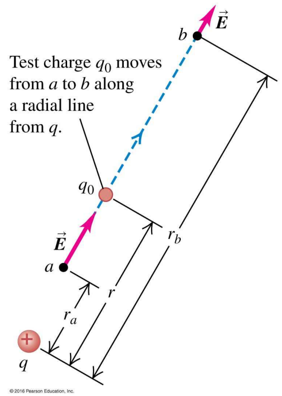
- Þegar y_a er stærra en y_b þá ferðast jákvæð hleðsla niður á við svo að sviðið framkvæmir jákvæða vinnu og U minnkar
- Þegar y_a er minna en y_b þá ferðast jákvæð hleðsla upp á við svo að sviðið framkvæmir neikvæða vinnu og U eykst

Rafstöðuorka



- Ef hleðslan er neikvæð þá eykst stöðuorkan þegar ögnin ferðast með sviðinu og minnkar þegar ögnin ferðast á móti sviðinu

Rafstöðuorka

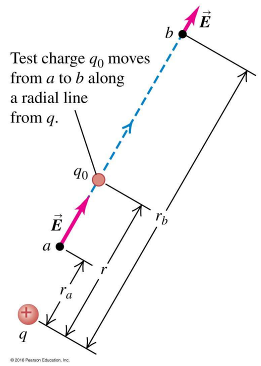


- Skoðum nú tilfellið þegar tilraunaögn q_0 ferðast í sviðinu frá einni kyrrstæðri punkthleðslu q
- Krafturinn sem verkar á q_0 er gefinn með lögmáli Coulomb

$$F_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}$$

- Þegar báðar agnirnar hafa sömu hleðslu er þetta fráhrindikraftur en ef þær hafa andstæða hleðslu er þetta aðdráttarkraftur

Rafstöðuorka

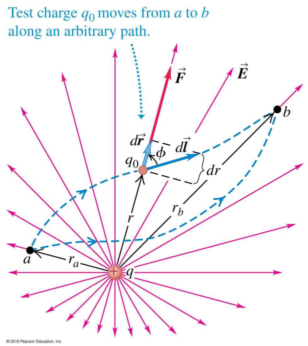


- Krafturinn er ekki fasti sem þýðir að það þarf að beita tegrun til að reikna vinnuna
- Vinnan sem er framkvæmd á q_0 þegar hún færist frá a til b er

$$W_{a\to b} = \int_{r_\mathrm{a}}^{r_\mathrm{b}} F_r \mathrm{d}r = \int_{r_\mathrm{a}}^{r_\mathrm{b}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_\mathrm{a}} - \frac{1}{r_\mathrm{b}}\right)$$

og orkan sem er framkvæmd af rafkraftinum fyrir þessa braut ræðst eingöngu af endapunktunum

Rafstöðuorka



- Skoðum nú almennra tilfelli þegar a og b liggja ekki sömu radíal línunni, þá er vinnan sem er framkvæmd á q_0 gefin með

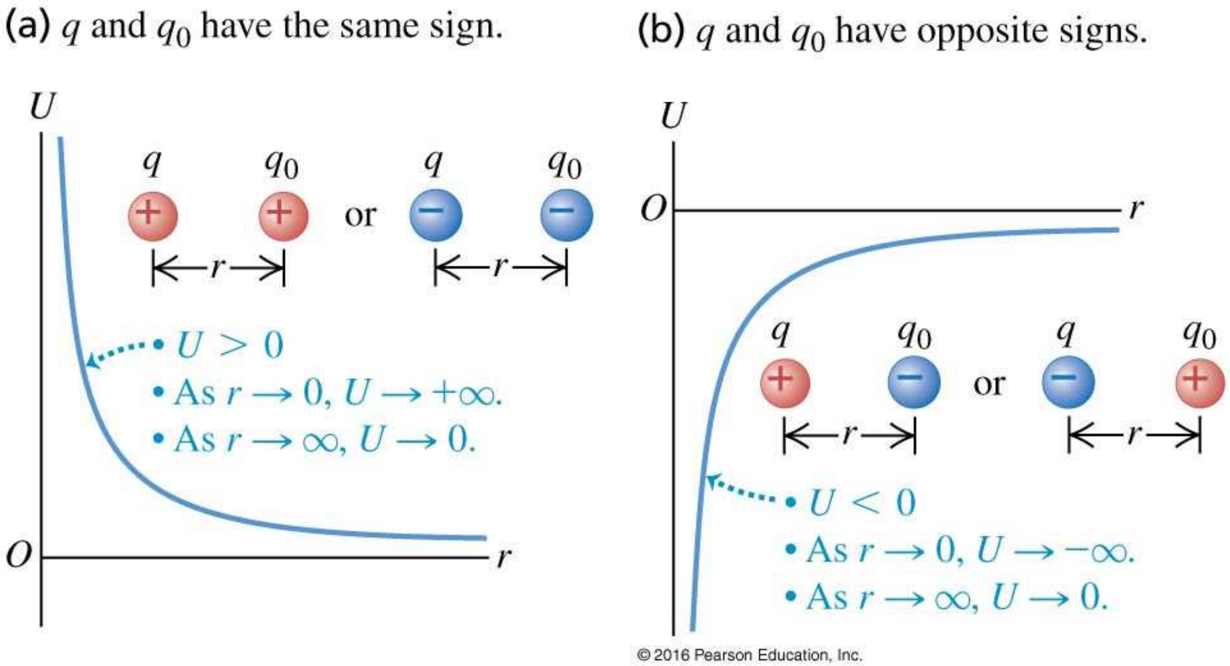
$$W_{a\to b} = \int_{r_\mathrm{a}}^{r_\mathrm{b}} F\cos\phi d\ell = \int_{r_\mathrm{a}}^{r_\mathrm{b}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\cos\phi$$

- Myndin sýnir að $\cos\phi d\ell = \mathrm{d}r$, það er að vinnan framkvæmd á örsmæðinni $d\ell$ er aðeins háð $\mathrm{d}r$, eða fjarlægðinni r á milli hleðslanna

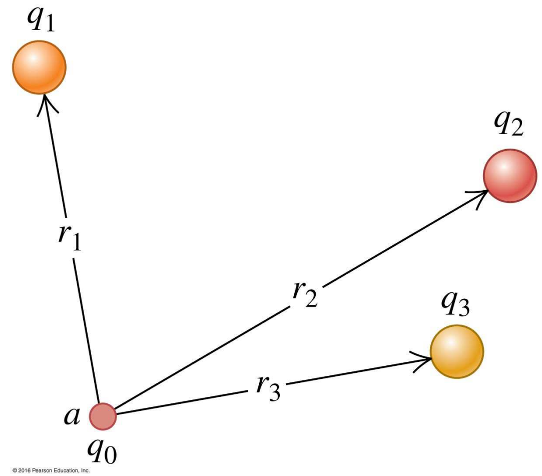
Rafstöðuorka

- Rafstöðuorka fyrir tvær punkthleðslur

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r}$$



Rafstöðuorka



- Ef gert er ráð fyrir að hleðslan q_0 ferðist í rafsviði $\mathbf{E}$ sem stafar af nokkrum punkthleðslum q_1, q_2, q_3,... í fjarlægðunum r_1, r_2, r_3,... frá q_0 þá er rafstöðuorkan

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \ldots\right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Rafstöðuorka

- Við sjáum það að mættisorkan er núll þegar vegalengdirnar r_1, r_2 $\ldots$ eru óendanlegar, það er þegar tilraunahleðslan q_0 er í mjög mikilli fjarlægð frá hinum hleðslunum sem mynda sviðið
- Jafnan hér að ofan gefur okkur rafstöðuorku vegna hleðslunnar q_0 sem situr í sviðinu $\mathbf{E}$ frá hinum hleðslunum
- En á milli allra agnanna q_1, q_2 $\ldots$ sem eru í fjarlægðum r_1, r_2 $\ldots$ hver frá annarri er einnig rafstöðuorka
- Fyrir hvert par q_i og q_j er fjarlægð á milli hleðsla r_{ij} og heildar stöðuorkan fyrir safn af hleðslum

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

og summan er tekin yfir öll pör hleðslna

Rafmætti

- Mætti er rafstöðuorka á hleðslueiningu
- Við skilgreinum mættið V í sérhverjum punkti í rafsviði sem rafstöðuorku á hleðslueiningu með tilraunahleðslunni q_0 í þeim punkti

$$V = \frac{U}{q_0}$$

eða

$$U = q_0 V$$

- Mættisorkan og hleðsla eru báðar stigstærðir svo að mættið er stigstærð
- SI einingin fyrir mætti, er volt, sem er nefnd eftir ítalanum Alessandro Volta (1745-1827), og svarar til 1 joule á hvert Coulomb

$$1\ \mathrm{V} = 1\ \mathrm{J/C} = 1\ \mathrm{joule/coulomb}$$

Rafmætti

- Ef við skoðum vinnuna sem rafkraftur framkvæmir þegar við færum a til b

$$-\Delta U = -(U_{\mathrm{a}} - U_{\mathrm{b}})$$

og ritum á hverja hleðslueiningu

$$\frac{W_{\mathrm{a}\to\mathrm{b}}}{q_0} = -\frac{\Delta U}{q_0} = \left(\frac{U_{\mathrm{b}}}{q_0} - \frac{U_{\mathrm{a}}}{q_0}\right) = -(V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{a}}) = V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{b}}$$

- Við köllum V_{a} mættið í punkti a og V_{b} mættið í punkti b
- Mismunurinn $V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{b}}$ er mættið við a með tilliti til punkts b og er það stundum ritað V_{ab}

Rafmætti

- Til að finna mættið V sem stafar frá einni punkthleðslu q dielum við í stöðuorkuna með q_0

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

- Mættið eins og rafsviðið er óháð tilraunahleðslunni q_0
- Á sama hátt fyrir safn af hleðslum

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

- Þegar við höfum samfellda hleðsludreifingu eftir línu, yfirborði, eða í rúmmáli deilum við hleðlunum í örsmæðir dq og summan verður tegur

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

Rafmætti fundið frá rafsviði

- Oft þurfum við að finna mættið V þegar rafsviðið er þekkt
- Krafturinn sem verkar í tilraunahleðslu q_0 er ritaður

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}$$

svo að vinnan sem er framkvæmd af rafkraftinum er

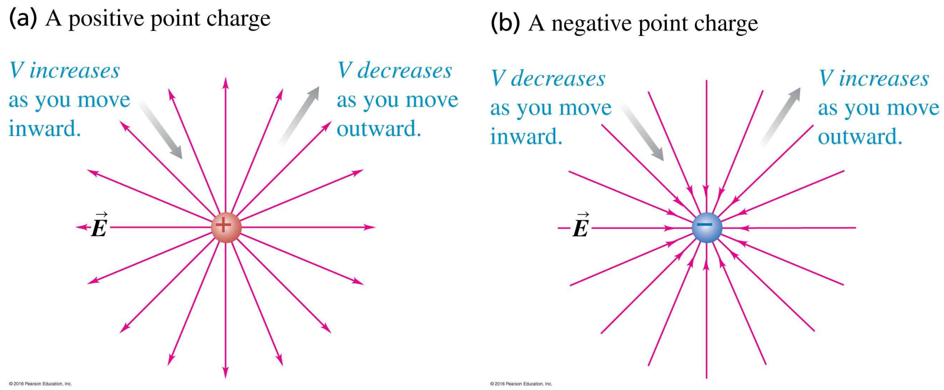
$$W_{\mathrm{a}\to\mathrm{b}} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\ell = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\ell$$

- Ef við deilum með q_0 þá fæst

$$V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{b}} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\ell = \int_a^b E \cos\phi \mathrm{d}\ell$$

og gildið á $V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{b}}$ er óháð brautinni sem er tekin frá a til b

Rafmætti fundið frá rafsviði



- Rafsviðið stefnir frá jákvæðri hleðslu og $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ er jákvætt í sérhverri endanlegri fjarlægð frá hleðslunni
- Fyrir neikvæða hleðslu stefnir rafsviðið í átt að hleðslunni og $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ er neikvæð stærð

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.1.

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.2.

Útreikningar á rafmætti

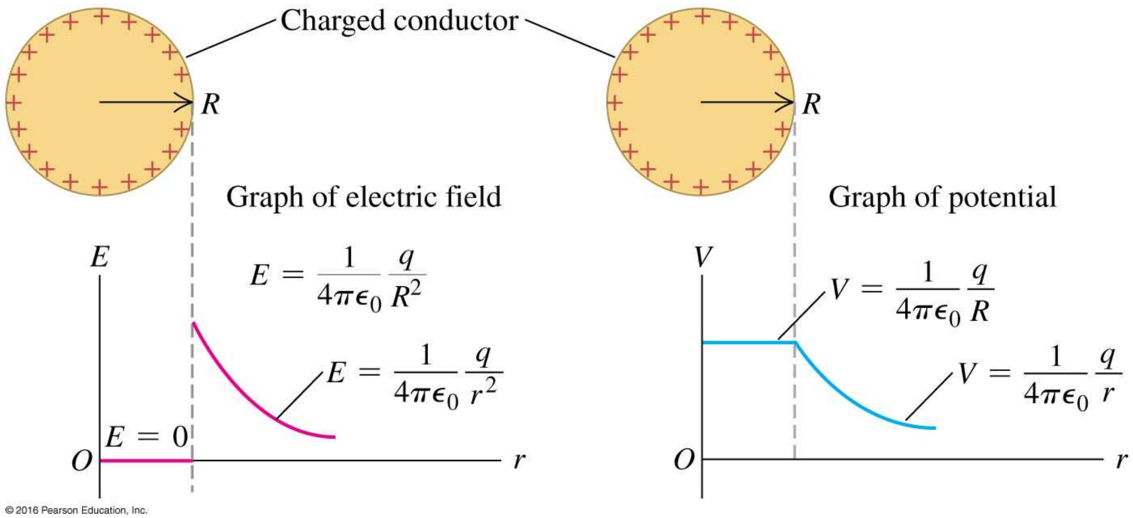
- Gerum ráð fyrir leiðandi kúlu af radía R sem hefur heildarhleðslu q
- Finnum rafmættið alls staðar, bæði innan og utan kúlunnar
- Sviðið utan kúlunnar er það sama og ef við fjarlægðum hana og settum í stað hennar punkthleðslu q
- Þá er mættið utan kúlunnar í fjarlægð r gefið með

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

- Mættið á yfirborði kúlunnar er

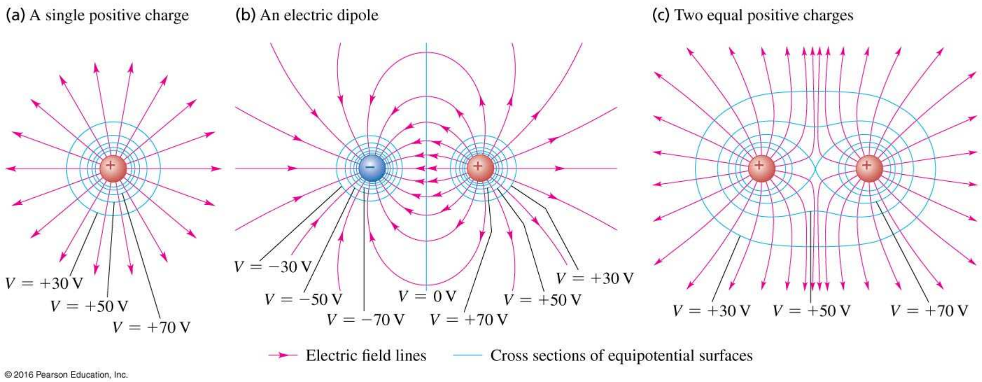
$$V_{\text{surface}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}$$

Útreikningar á rafmætti



- Innan kúlunnar er **E** núll allsstaðar – engin vinna er framkvæmd á tilraunahleðslu sem flyst frá einum punkti til annars innan kúlunnar – mættið er hið sama í sérhverjum punkti innan kúlunnar eða $q/4\pi\epsilon_0 R$, sama og á yfirborðinu

Jafnmættisyfirborð



- **Jafnmættisyfirborð** eru þrívíð yfirborð þar sem mættið V er hið sama í sérhverjum punkti
- Ef að tilraunahleðsla q_0 er flutt frá einum punkti í annan á slíku yfirborði er rafstöðuorkan óbreytt $q_0 V$
- Rafsviðið $\mathbf{E}$ er hornrt á yfirborðið
- Einnig er rafkrafturinn $q_0\mathbf{E}$ alltaf hornréttur á færslu hleðslu sem ferðast eftir yfirborðinu

Tengsl rafmættis og rafsviðs

- Ravsvið og rafmætti eru tengdar stærðir og tengslunum er lýst með

$$V_\mathrm{a} - V_\mathrm{b} = \int_a^b \mathbf{E} \mathrm{d}\ell$$

- Ef við þekkjum **E** í mismunadi punktum þá má nota þessa jöfnu til að finna mættismuninn

- Þennan mættismun má einnig rita

$$V_\mathrm{a} - V_\mathrm{b} = \int_a^b \mathrm{d}V = -\int_b^a \mathrm{d}V$$

þar sem $\mathrm{d}V$ er örsmæðar mættisbreytingin sem er tengd örsmæðinni $\mathrm{d}\ell$ á brautinni frá b til a

Tengsl rafmættis og rafsviðs

- Við sjáum þá að

$$-\int_b^a \mathrm{d}V = \int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\ell$$

og þar með

$$-\mathrm{d}V = \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\ell$$

- Í þremur víddum er

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}} E_x + \hat{\mathbf{j}} E_y + \hat{\mathbf{k}} E_z$$

og

$$\mathrm{d}\ell = \hat{\mathbf{i}} \mathrm{d}x + \hat{\mathbf{j}} \mathrm{d}y + \hat{\mathbf{k}} \mathrm{d}z$$

Tengsl rafmættis og rafsviðs

- Þetta er þess vegna ritað

$$\mathbf{E} = -\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

- Táknað sem vigur er þetta oft ritað

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

- Ef rafsviðið er þekkt þá má finna mættið og öfugt

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.3.

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.4.

Frekari upplýsingar

- Þessi kafli er að mestu byggður á kafla 23 hjá Young and Freedman (2015).

Heimildir

Young, H. D. and R. A. Freedman (2015). *University Physics with Modern Physics* (14 ed.). Harlow, England: Pearson Education.