Eðlisfræði II:

Jafnstraumsrásir

Kafli 6

Jón Tómas Guðmundsson

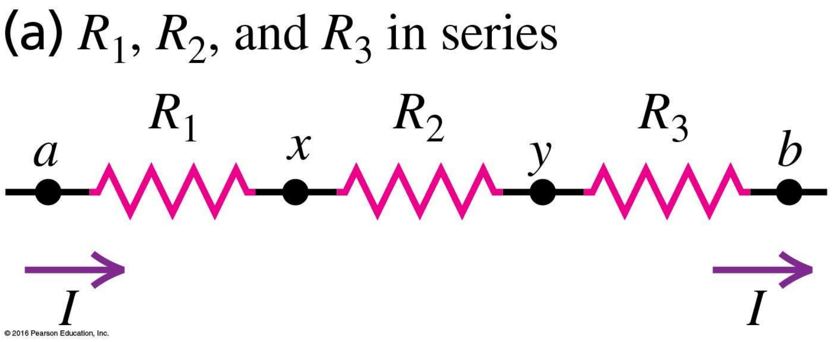
tumi@hi.is

5. vika vor 2016

Inngangur

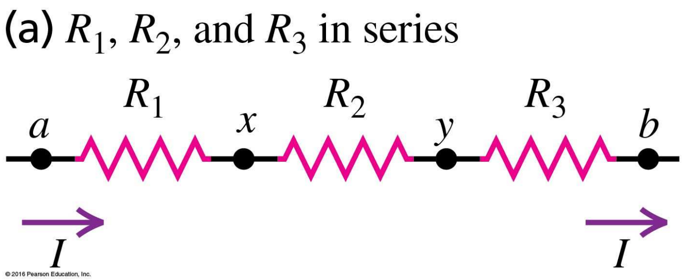
- Hér fjöllum við um **jafnstraumsrásir** (e. direct current (dc)), það er stefna straumsins breytist ekki með tíma
- Bæjarspennunni er veitt sem **riðspennu** (e. alternating current (ac)), þar sem straumstefnan breytist stöðugt

Viðnám raðtengd og hliðtengd



- Viðnám koma fyrir í öllum rásum
- Gerum ráð fyrir að við höfum þrjú viðnám R_1, R_2 og R_3 og þau er hægt að tengja á ýmsa mismunandi vegu milli pólanna a og b
- Á myndinni hér að ofan eru þessi viðnám raðtengd milli punktanna a og b

Viðnám raðtengd og hliðtengd



- Það rennur sami straumurinn I um öll viðnámin ef þau eru raðtengd
- Beitum $V = IR$ á öll viðnámin

$$V_{\mathrm{ax}} = IR_1, \quad V_{\mathrm{xy}} = IR_2 \quad \text{og} \quad V_{\mathrm{yb}} = IR_3$$

- Spennumunurinn yfir hvert viðnám þarf ekki að vera hinn sami (nema í því sér tilfelli að öll viðnámin séu jafn stór)

Viðnám raðtengd og hliðtengd

- Mættismunurinn V_{ab} er þá summan

$$V_{\mathrm{ab}} = V_{\mathrm{ax}} + V_{\mathrm{xy}} + V_{\mathrm{yb}} = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

  og þá er

$$\frac{V_{\mathrm{ab}}}{I} = R_1 + R_2 + R_3$$

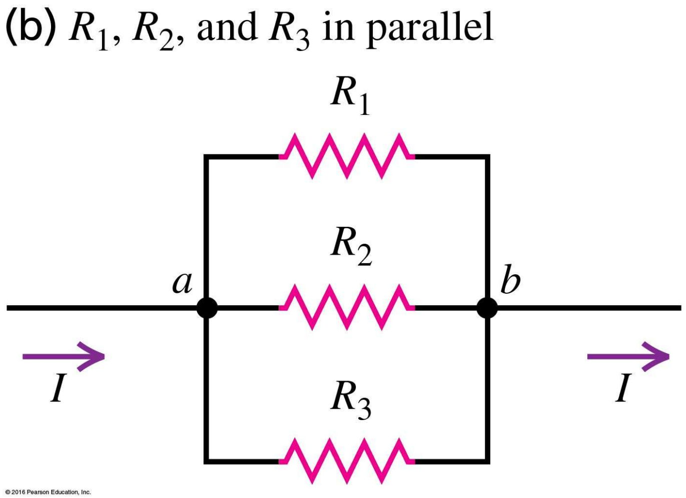
- Þetta hlutfall er samkvæmt skilgreiningu jafngildisviðnámið R_{eq} þannig að

$$\frac{V_{\mathrm{ab}}}{I} = R_1 + R_2 + R_3 = R_{\mathrm{eq}}$$

- Almennt má rita fyrir hve mörg raðtengd viðnám sem vera vill

$$R_{\mathrm{eq}} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$

Viðnám raðtengd og hliðtengd



- Ef viðnámin eru hliðtengd tengd þá er mættismunurinn yfir þau sá sami V_{ab} en straumurinn er mismunandi
- Straumurinn um viðnámin þrjú er

$$I_1 = \frac{V_{\mathrm{ab}}}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V_{\mathrm{ab}}}{R_2} \quad \text{og} \quad I_3 = \frac{V_{\mathrm{ab}}}{R_3}$$

Viðnám raðtengd og hliðtengd

- Almennt er straumurinn ekki sá sami um viðnámin
- Heildarstraumurinn er summa stramsins um hvert viðnám

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = V_{\mathrm{ab}}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

eða

$$\frac{I}{V_{\mathrm{ab}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

- Jafngildisviðnámið er þá

$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Viðnám raðtengd og hliðtengd

- Almennt gildir þá fyrir hve mörg hliðtengd viðnám sem vera vill

$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots$$

- Fyrir tvö hliðtengd víðnám er oft þægilegt að nota

$$R_{\mathrm{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Lögmál Kirchhoffs

- Fullkominn leiðari tengir saman plúspól spennulindarinnar við efri pól viðnámsins; a og b hafa sömu spennu óháð straumnum i.
- Eins hafa punktarnir c og d sömu spennu.
- Spennan í punkti a er $v(t)$ voltum hærri en spennan í punkti c; svo að spennan í punkti b er einnig $v(t)$ voltum hærri en spennan í punkti d.
- Frá punkti c til a er **spennuris** upp á $v(t)$ og síðan **spennufall** frá b til d.

Lögmál Kirchhoffs

- Til að greina rásir beitum við aðferðum sem voru þróaðar af þýska eðlisfræðingnum Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887)
- Fyrst er það **spennulögmál Kirchhoffs (KVL)**:

Á hverjum tíma er algebrísk summa spennurisa umhverfis lokaða leið í rás núll

$\Longrightarrow$ Dæmi 6.1.

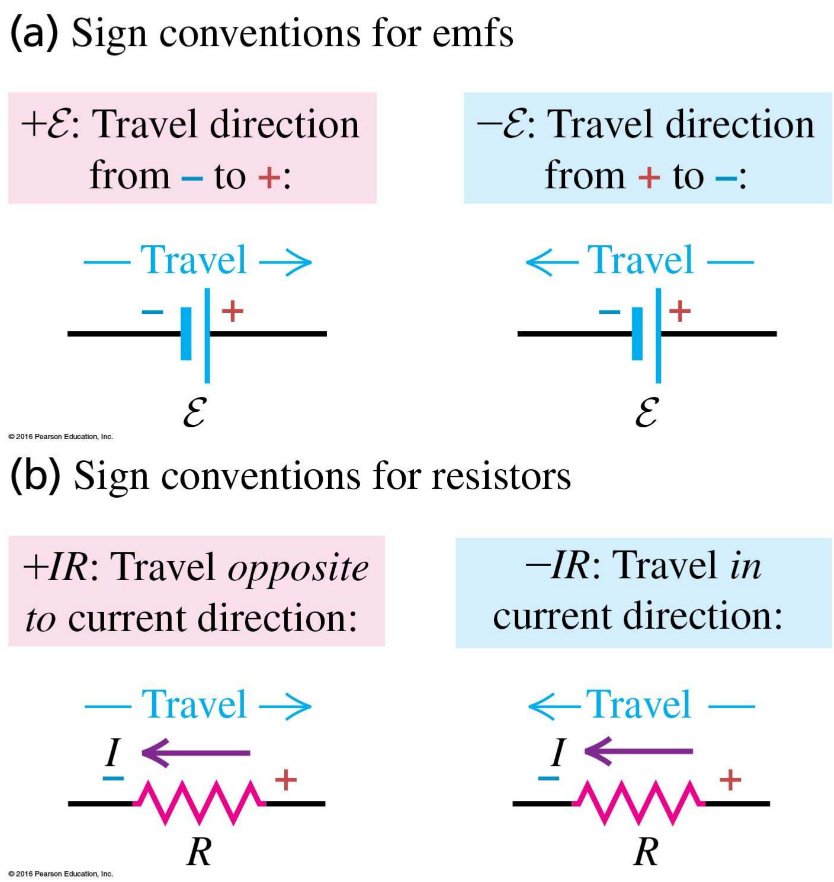
$\Longrightarrow$ Dæmi 6.2.

Lögmál Kirchhoffs

- Skilgreinum **hnútpunkt** sem hvern þann punkt í rás þar sem pólar tveggja eða fleiri rásaeininga tengjast saman.
- Hnútpunktur getur ekki geymt hleðslu og því er heildarstraumurinn að hnútpunktinum að vera jafn heildarstraumnum frá honum á hverjum tíma.
- Þá er það **straumlögmál Kirchhoffs (KCL)**:

Á sérhverjum tíma er algebrísk summa allra strauma að ákveðnum hnútpunkti núll

Lögmál Kirchhoffs



- Formerkjavenjur þegar lögmálum Kirchhoffs er beitt

Lögmál Kirchhoffs

- Tvær rásaeiningar eru raðtengdar þá og því aðeins að
  - annar póll annarar tengist öðrum pól hinnar í hnútpunkti
  - engar aðrar rásaeiningar tengist þeim í hnútpunkti

  Séu tvær rásaeiningar raðtengdar er:
  - straumurinn sá sami í þeim báðum
  - heildarspennan jöfn summu spennanna yfir hvora einingu fyrir sig

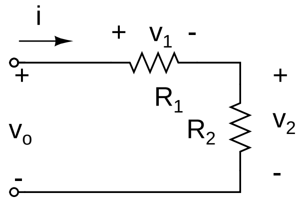
Lögmál Kirchhoffs

- Tvær rásaeiningar eru hliðtengdar þá og því aðeins að
  - annar póll annarar tengist öðrum pól hinnar í hnútpunkti
  - hinir pólarnir tengjast einnig saman í öðrum hnútpunkti

  Séu tvær rásaeiningar hliðtengdar er
  - spennan sú sama yfir þær báðar
  - heildarstraumurinn jafn summu straumanna í hvorri einingu fyrir sig

Spennudeiling

Oft þekkjum við heildarspennu yfir raðtengingu tveggja viðnáma en þurfum að vita spennuna yfir annað viðnámið.



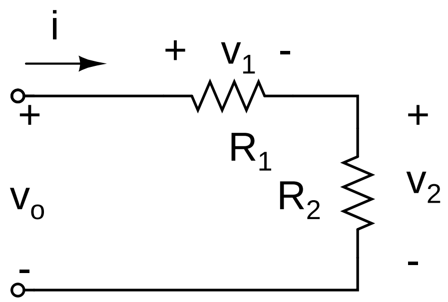
Viljum t.d. finna v_2 ef við þekkjum v_{o} (mynd). Getum fundið i með því að nota jafngildisviðnám

$$i = \frac{v_{\mathrm{o}}}{R_{\mathrm{eq}}} = \frac{v_{\mathrm{o}}}{R_1 + R_2}$$

og síðan samkvæmt lögmáli Ohms

$$v_2 = iR_2 = v_{\mathrm{o}} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Spennudeiling

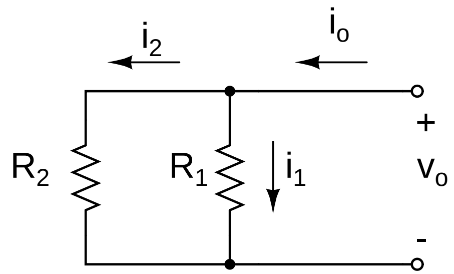


- Sjáum að $R_2/(R_1+R_2) < 1$
- Þessi stærð segir til um hversu stórt hlutfall heildarspennunnar v_o fellur yfir viðnámið R_2.
- Á sama hátt er

$$v_1 = v_o \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

Straumdeiling

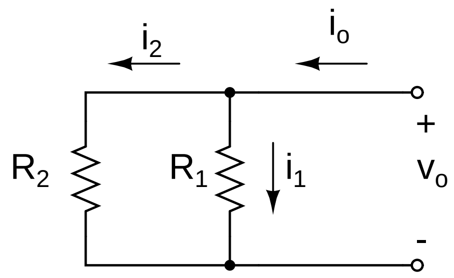
- Höfum tvö hliðtengd viðnám
- Heildarstraumur er i_o; viljum finna straum í hvoru viðnámi fyrir sig



- Notum jafngildisviðnám

$$v = i_o R_{eq} = i_o \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Straumdeiling



- Samkvæmt lögmáli Ohms er

$$i_1 = \frac{v}{R_1} = i_o \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

og

$$i_2 = i_o \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

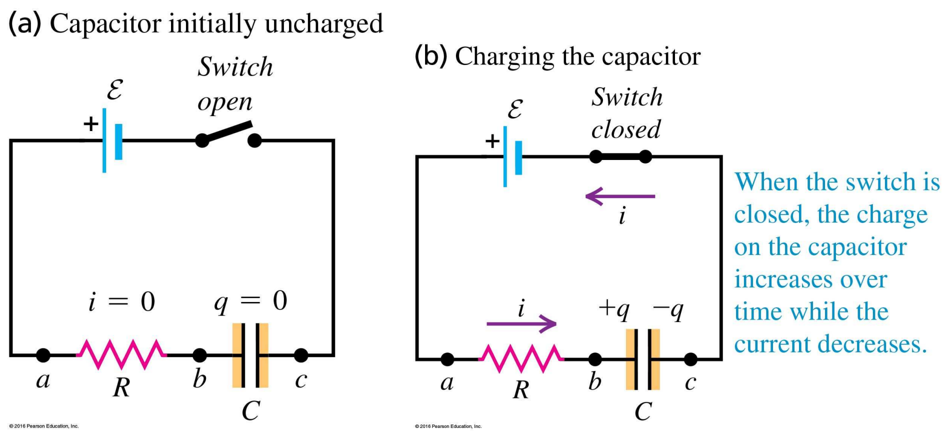
- Stærri hluti straumsins fer í gegnum minna viðnámið (minnsta viðnámið).

$\Longrightarrow$ Dæmi 6.3.

RC-rásir

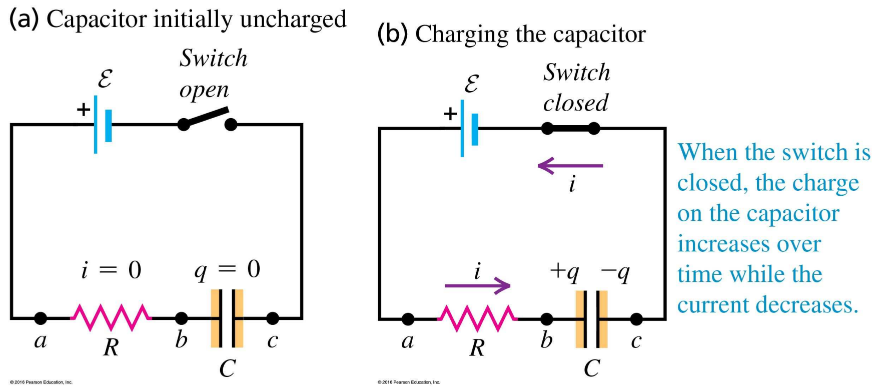
- Fram til þessa höfum við gert ráð fyrir að íspennur og viðnám séu fastar (breytist ekki með tíma)
- Þetta þýðir að öll mætti og straumar eru líka óháðir tíma
- En bara við það að hlaða og afhlaða þétti, sjáum við að spenna og straumar breytast með tíma
- Margar gagnlegar rásir byggja á því að hlaða og afhlaða þétti

RC-rásir



- Myndin sýnir einfalda rás til þess að hlaða þétti
- Rás eins og þessi sem samanstendur af raðtengingu þéttis og viðnáms er nefnd **RC-rás**
- Við gerum ráð fyrir kjörrafhlöðu sem viðheldur fastri íspennu og hefur ekkert innra viðnám ($r = 0$) og lítum fram hjá viðnámi allra leiðara

RC-rásir



- Við gerum ráð fyrir að þéttirinn sé upphaflega óhlaðinn og við tímann $t = 0$ lokum við rofanum
- Við það lokast rásin og straumur fer að renna og hlaða upp þéttinn
- Þar sem þéttirinn er óhlaðinn er spennumunurinn yfir hann $v_{\rm bc}$ núll við $t = 0$
- Á þessari stundu er er mættismunurinn $v_{\rm ab}$ yfir viðnámið R jafn íspennunni $\mathcal{E}$

RC-rásir

- Upphafsstraumurinn um viðnámið ($t = 0$), sem við táknum með I_0, er fundin með því að beita lögmáli Ohms

$$I_0 = \frac{v_{\mathrm{ab}}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

- Þegar þéttirinn hleðst upp þá eykst spennan yfir hann v_{bc} á meðan spennan yfir viðnámið v_{ab} fellur
- Þegar þéttirinn er full hlaðinn er öll íspenna rafhlöðunnar yfir þéttinn $v_{\mathrm{bc}} = \mathcal{E}$

RC-rásir

- Látum $q(t)$ vera augnablikshleðsluna og $i(t)$ vera augnabliksstrauminn í rásinni við tímann t eftir að rofanum hefur verið lokað
- Augnabliksmættismunurinn v_{ab} og v_{bc} er þá

$$v_{\mathrm{ab}} = iR \quad \text{og} \quad v_{\mathrm{bc}} = \frac{q}{C}$$

- Beitum þá spennulögmáli Kirchhoffs

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0$$

sem við leysum fyrir strauminn i

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

RC-rásir

- Við $t = 0$ þegar rofinn lokast er þéttirinn óhlaðinn og $q(t = 0) = 0$ svo að við höfum upphafsstraum

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

- Þegar hleðslan $q(t)$ eykst stækkar liðurinn $q(t)/RC$ og hleðsla þéttisins nálgast loka hleðslu sína sem við táknum með Q_{f}
- Straumurinn fellur og verður að lokum enginn

RC-rásir

- Þegar $i(t) = 0$ þá er

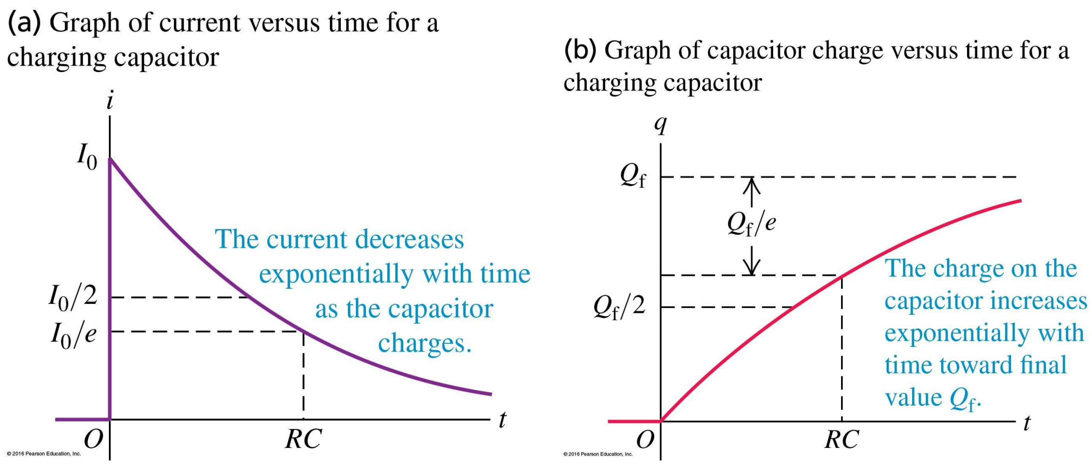
  $$\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Q_{\mathrm{f}}}{RC}$$

  svo

  $$Q_{\mathrm{f}} = C\mathcal{E}$$

  og heildar hleðsla þéttisins er óháð viðnáminu R

RC-rásir



- Myndin sýnir strauminn (vinstri) og hleðslu þéttisins (hægri) sem fall af tíma
- Á augnablikinu þegar rofinn lokast stekkur straumurinn frá núlli upp í upphafsgildið $I_0 = \mathcal{E}/R$, og síðan fellur hann niður að núlli
- Hleðsla þéttisins er núll í upphafi en fer hækkandi og nálgast lokagildið $Q_\mathrm{f} = C\mathcal{E}$

RC-rásir

- Við getum leitt út jöfnur fyrir $q(t)$ of $i(t)$
- Notum $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ og ritum

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - C\mathcal{E})$$

sem við umritum

$$\frac{\mathrm{d}q}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC}$$

og tegrum síðan báðar hliðar

$$\int_0^q \frac{\mathrm{d}q'}{q - C\mathcal{E}} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{RC}$$

sem gefur

$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

RC-rásir

- Þetta getum við umritað

$$\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$$

- Þar með er hleðslan

$$q(t) = C\mathcal{E}\left[1 - \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)\right] = Q_{\mathrm{f}}\left[1 - \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)\right]$$

- Augnabliksstraumurinn er þá

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{E}}{R}\exp\left(\frac{-t}{RC}\right) = I_0 \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$$

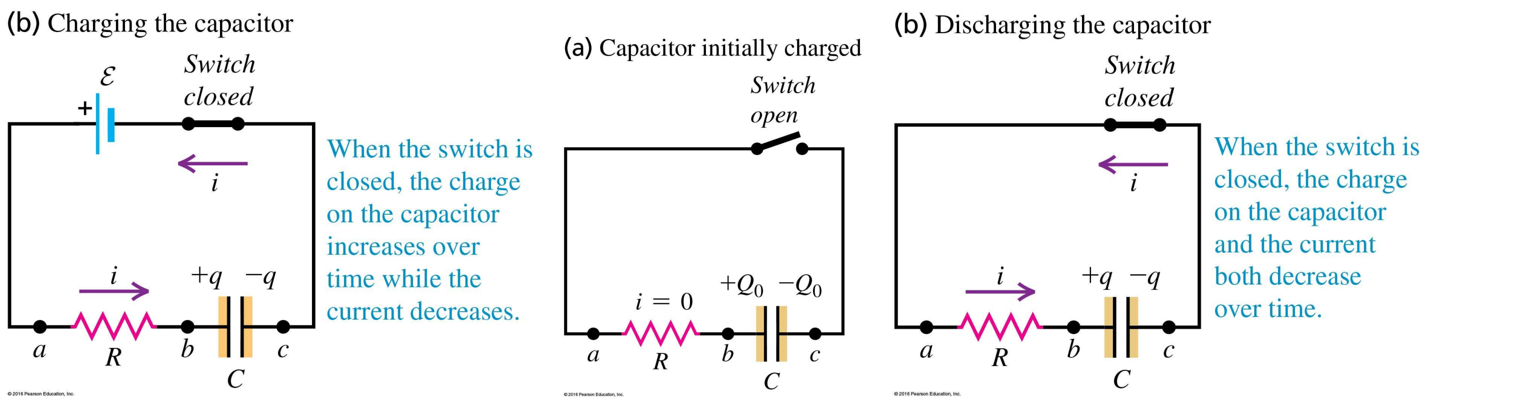
RC-rásir – tímafasti

- Þegar tími sem svarar til RC hefur liðið hefur straumurinn fallið sem nemur 1/e (0.368) af uphaflegu gildi sínu
- Þá hefur hleðslan á þéttinum náð $(1 - 1/\mathrm{e}) = 0.632$ af loka gildi sínu $Q_\mathrm{f} = C\mathcal{E}$
- Stærðin RC er þess vegna mælikvarði á hve hratt þéttirinn hleðst upp
- Við köllum RC **tímafasta** rásarinnar og táknum með τ

$$\tau = RC$$

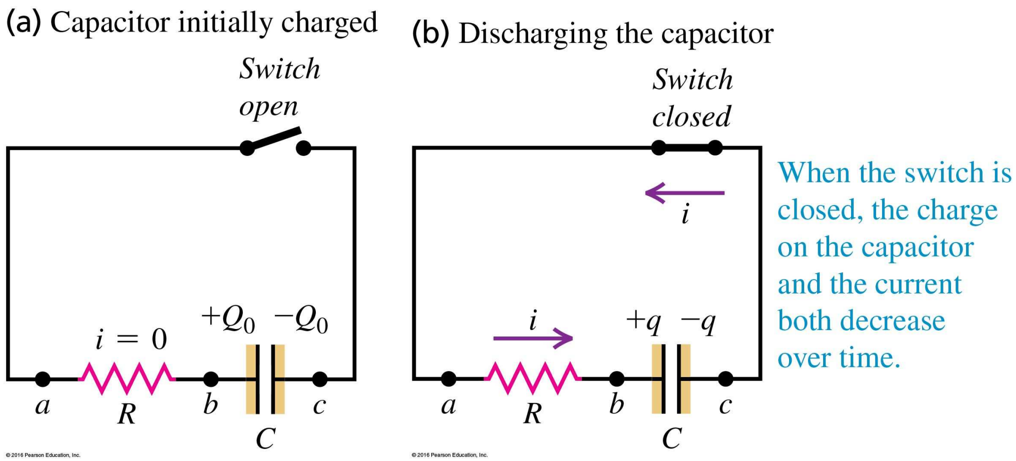
- Þegar τ er lítið þá hleðst þéttirinn hratt

RC-rásir – afhleðsla þéttis



- Gerum nú ráð fyrir að þéttirinn hafi byggt upp hleðslu Q_0, þegar við fjarlægjum rafhlöðuna og rásin er opin (rofi) milli tengipunktanna a og c
- Rofanum er lokað við $t = 0$ þegar $q = Q_0$
- Þéttirinn afhleðst þá um viðnámið og hleðslan fellur að lokum niður í núll

RC-rásir – afhleðsla þéttis



- Beitum spennulögmáli Kirchhoff, nú er $\mathcal{E} = 0$ þannig að

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{q}{RC}$$

- Straumurinn er núna neikvæður, og upphafsstraumurinn er

$$I_0 = \frac{-Q_0}{RC}$$

RC-rásir – afhleðsla þéttis

- Við umritum og tegrum

$$\int_{Q_0}^{q} \frac{\mathrm{d}q'}{q'} = -\frac{q}{RC} \int_0^t \mathrm{t}'$$

svo að

$$\ln\left(\frac{q}{Q_0}\right) = -\frac{q}{RC}$$

þannig að

$$q(t) = Q_0 \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$$

- Augnabliksstraumurinn er síðan tímaafleiðan af hleðslunni

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q_0}{RC}\exp\left(\frac{-t}{RC}\right) = I_0 \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$$

Rafmagnsdreifikerfi

- Bæjarspennan er 240 V
- Þetta er rms (root-mean-square) gidli spennunnar – fyrir riðspennu er það $1/\sqrt{2}$ sinnum topp gildi spennunnar
- Straumurinn sem er dreginn er af tilteknu tæki ræðst af aflgildinu
- Til dæmis er straumurinn um 100 W ljósaperu

$$I = \frac{P}{V} = \frac{100\ \mathrm{W}}{240\ \mathrm{V}} = 0.4167\ \mathrm{A}$$

- Aflið sem tapast í þessari ljósaperu ræðst í raun af viðnáminu R, en

$$P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R}$$

Rafmagnsdreifikerfi

- Við höfum þá

$$R = \frac{V}{I} = \frac{240\ \mathrm{V}}{0.415\ \mathrm{A}} = 576\ \Omega$$

eða

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{(240\mathrm{V})^2}{100\ \mathrm{W}} = 576\ \Omega$$

- Það sem við kaupum frá orkufyrirtækinu er orka
- Afl er orka sem er flutt á tímaeiningu, svo að orka er meðalafl magfaldað með tíma

Rafmagnsdreifikerfi

- Orkan sem seld er af orkufyrirtækinu er mæld í kilowatt-hour ($1\ \mathrm{kW} \cdot \mathrm{h}$)

$$1\ \mathrm{kW} \cdot \mathrm{h} = 1000\ \mathrm{W} \times 3600\ \mathrm{s} = 3.6 \times 10^6\ \mathrm{Ws} = 3.6 \times 10^6\ \mathrm{J}$$

- Verð er um 7 kr/KWh þannig að ef við höfum kveikt á 100 W peru í 24 h þá kostar það

$$0.1\ \mathrm{kW} \times 7\ \frac{\mathrm{kr.}}{\mathrm{kWh}} \times 24\mathrm{h} = 16.80\ \mathrm{kr.}$$

$\Longrightarrow$ Dæmi 6.4.

Frekari upplýsingar

- Þessi kafli er að mestu byggður á kafla 26 hjá Young and Freedman (2015).

Heimildir

Young, H. D. and R. A. Freedman (2015). *University Physics with Modern Physics* (14 ed.). Harlow, England: Pearson Education.