Eðlisfræði II:

Rafsegulspan

Kafli 9

Jón Tómas Guðmundsson

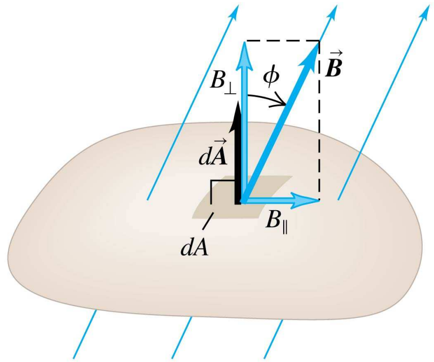
tumi@hi.is

9. vika vor 2016

Inngangur

- Rafsegulspan fjallar um það hvernig tímaháð segulsvið verkar eins og uppspretta rafsviðs
- Við skoðum einnig hvernig tímaháð rafsvið verkar eins og uppspretta segulsviðs
- Þessu er lýst með safni jafna sem nefndar eru **jöfnur Maxwells** sem lýsa hegðan raf- og segulsviðs almennt

Lögmál Faraday



Magnetic flux through element of area $d\vec{A}$:
$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\perp dA = B\, dA \cos\phi$

- Kjarninn í öllum spanhrifum er breyting í segulflæði í rás
- Fyrir örsmæðarflatarmálið $\mathrm{d}\mathbf{A}$ í segulsviðinu $\mathbf{B}$ er segulflæðið $\mathrm{d}\Phi_\mathrm{B}$ um flötinn

$$\mathrm{d}\Phi_\mathrm{B} = \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = B_\perp \mathrm{d}A = B\mathrm{d}A\cos\phi$$

þar sem $B_\perp$ er sá þáttur $\mathbf{B}$ sem er hornréttur á yfirborð örsmæðarflatarmálsins og ϕ er hornið á milli $\mathbf{B}$ og $\mathrm{d}\mathbf{A}$

Lögmál Faraday

- Heildarsegulflæðið um endanlegan flöt er gefið með tegrinu yfir flötin

$$\Phi_{\mathrm{B}} = \int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int B \mathrm{d}A \cos\phi$$

- Ef $\mathbf{B}$ er einsleitt yfir sléttan flöt $\mathbf{A}$ þá er

$$\Phi_{\mathrm{B}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \int BA \cos\phi$$

- Spanlögmál Faraday segir

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t}$$

Lögmál Faraday

- Ef að spóla hefur N eins vafninga og ef að flæðið breytist á sama hátt í öllum vafningunum þá er

$$\mathcal{E} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t}$$

$\Longrightarrow$ Dæmi 9.1.

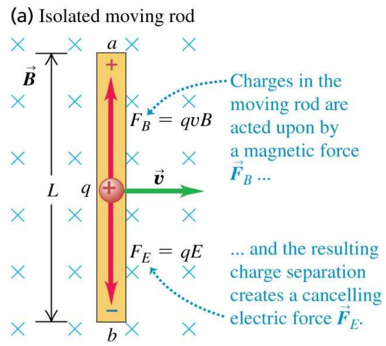
$\Longrightarrow$ Dæmi 9.2.

$\Longrightarrow$ Dæmi 9.3.

Lögmál Lenz

- Lögmál Lenz er önnur aðferð til að ákvarða stefnu spanaðs straums eða íspennu
- Lögmál Lenz segir: Stefna sérhverjar rafsegulspan aðgerðar er þannig að hún vinnur á móti því sem að veldur hrifunum
- Það sem veldur hrifunum getur verið breytilegt segulflæði, breytt flæði vegna hreyfingar leiðara eða hvoru tveggja
- Í kyrrstæðum rásum þar sem segulflæðið breytist þá veldur spanaði straumurinn eigin segulsviði, þetta segulsvið vinnur á móti upphaflega segulsviðinu – spanaði straumurinn vinnur á móti breytingu í segulflæði um rásina
- Þetta er ástæðan fyrir mínusnum í lögmáli Faraday

Íspenna vegna hreyfingar



- Segulsviðið $\mathbf{B}$ er einsleitt og stefnir inn í myndina og stöngin færist til hægri með föstum hraða $\mathbf{v}$
- Hlaðin ögn q í stönginni upplifir segulkraft $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ sem hefur stærðina $F = |q|vB$
- Þessi segulkraftur veldur því að frjálsir hlesðluberar innan stangarinnar ferðast, þannig að jákvæðar hleðslur safnast fyrir í efri hluta stangarinnar og neikvæðar hleðslur safnast í neðri hluta stangarinnar

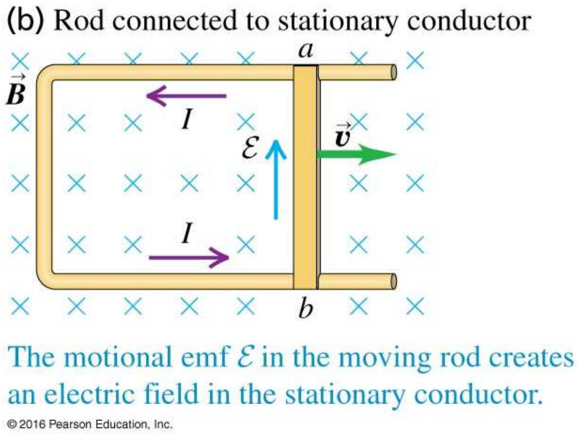
Íspenna vegna hreyfingar

- Þetta veldur því að rafsvið myndast innan stangarinnar í stefnuna frá a til b – andstætt segulkraftinum
- Þessi uppsöfnun hleðslubera heldur áfram þar til krafturinn vegna rafsviðs er jafn stór segulkraftinum eða $qE = qvB$
- Þetta veldur því að mættismunur myndast milli enda stangarinnar $V_{\mathrm{ab}} = V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{b}}$ eða

$$V_{\mathrm{ab}} = EL = vBL$$

þar sem a er við hærra mætti en b

Íspenna vegna hreyfingar



- Gerum nú ráð fyrir að stöngin færist eftir U-laga leiðara, þannig að lokuð rás sé mynduð
- Enginn segulkraftur verkar á hleðslurnar sem ferðast eftir U-laga leiðaranum, en hleðslurnar sem eru nálægt a og b endurraða sér á hann, sem veldur rafsviði í honum
- Þetta spanar straum í stefnuna sem er sýnd á myndinni

Íspenna vegna hreyfingar

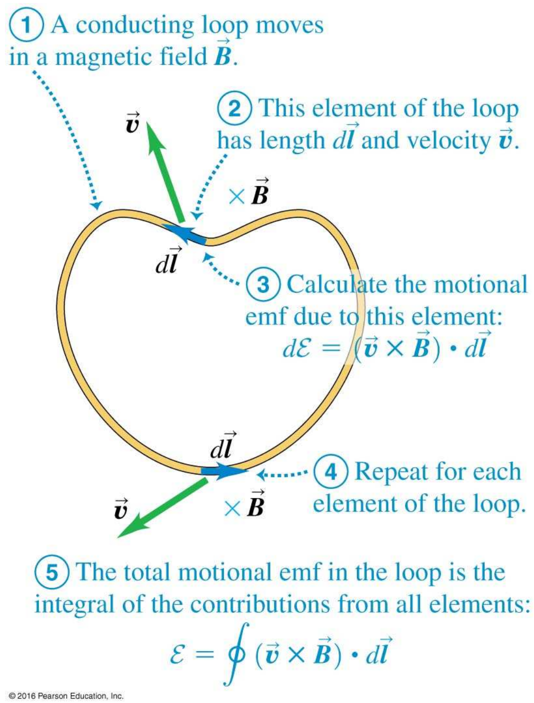
- Færsla stangarinnar hefur hér með orðið að íspennulind, hleðsla flyst þar frá lægra til hærra mættis, en Í U-laga leiðaraum flyst hleðsla frá lægra til hærra mættis
- Stærð íspennunnar sem myndast er

$$\mathcal{E} = vBL$$

- Ef viðnám U-laga leiðarans er þá ræðst straumurinn í rásinni af

$$vBL = IR$$

Íspenna vegna hreyfingar



- Þetta má setja fram almennt fyrir leiðara af hvaða lögun sem vera vill, sem ferðast í hvaða segulsviði sem vera vill, einsleitu eða ekki, en samt fast

Íspenna vegna hreyfingar

- Fyrir örsmæð leiðarans $\mathrm{d}\ell$, er framlagið $\mathrm{d}\mathcal{E}$ til íspennunnar gefin með

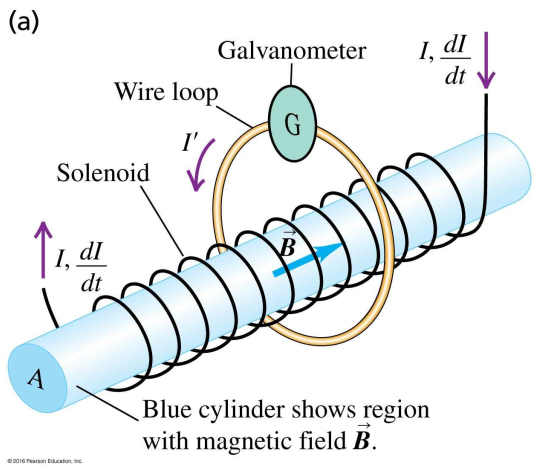
$$\mathrm{d}\mathcal{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\ell$$

- Fyrir sérhverja lokað leiðandi lykkju er íspennan

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\ell$$

$\Longrightarrow$ Dæmi 9.4.

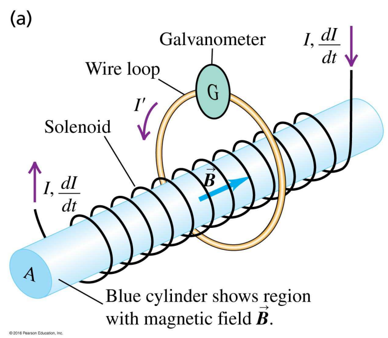
Spanað rafsvið



- Íspenna spanast líka þegar segulflæðið er breytilegt um sístæðan leiðara
- Gerum ráð fyrir langspólunni hér að ofan sem hefur n vafninga og þverskurðarflatarmálið A
- Þegar straumurinn I fer um spóluna spanast upp segulsviðið $\mathbf{B}$ eftir ás spólunnar

$$B = \mu_0 n I$$

Spanað rafsvið



- Segulflæðið um lykkjuna er þá

$$\Phi_{\mathrm{B}} = BA = \mu_0 n I A$$

- Þegar straumurinn breytist með tíma, þá breytist segulflæðið líka með tíma, og samkvæmt lögmáli Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} = -\mu_0 n A \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Spanað rafsvið

- Línutegrið sem að lýsir vinnunni sem spanaða sviðið framkvæmir á hleðslueiningu er

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\ell = \mathcal{E}$$

eða að það má endurrita lögmál Faraday

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\ell = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t}$$

og gildir ef brautin sem tegrað er eftir er sístæð

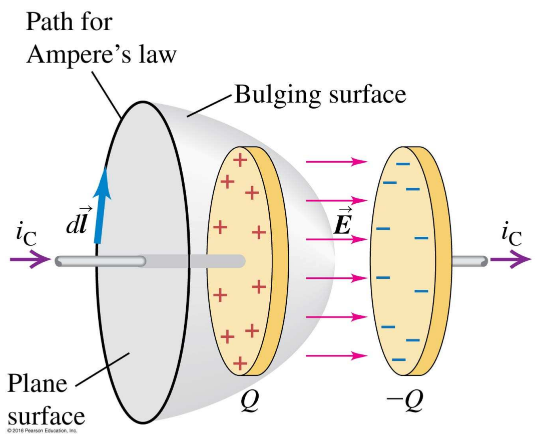
Færslustraumur

- Lögmál Ampere er ritað

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\ell = \mu_0 I_{\mathrm{encl}}$$

- Vandamálið við lögmál Ampere á þessu formi er að það er ófullkomið
- Til að sjá af hverju skoðum við upphleðslu á þétti
- Leiðarar bera strauminn i_{C} að annarri plötunni og útaf hinni, hleðslan Q eykst og rafsviðið $\mathbf{E}$ hækkar
- Við ritum i_{C} til að tákna leiðnistraum, til aðgreiningar frá raffærslu straumnum i_{D}
- Við notum litla stafi til að tákna augnabliksstrauminn i og augnabliksspennuna v sem eru stærðir sem geta breyst með tíma

Færslustraumur



- Þegar við beitum lögmáli Ampere á planið sem er afmarkað með hringnum er

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\ell = \mu_0 I_{\mathrm{encl}} = \mu_0 i_{\mathrm{C}}$$

- En þegar við skoðum strauminn um yfirborðið sem teygjist til hægri en afmarkast af sama hringnum sýnist sem enginn straumur fari um yfirborðið

Færslustraumur

- Eitthvað annað er að gerast á teygða yfirborðinu
- Þegar þéttirinn hleðst upp þá eykst rafsviðið $\mathbf{E}$ sem og rafflæðið Φ_{E} um yfirborðið
- Við getum ákvrðað hve hratt þessar stærðir stækka sem fall af hleðslu og straum
- Augnablikshleðslan er

$$q = Cv$$

  þar sem C er rýmdin og v er augnabliksmættismunurinn

Færslustraumur

- Fyrir plötuþétti er rýmdin
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$
og mættismunur milli platnanna
$$v = Ed$$
þar sem E er stærð rafsviðsins milli platnanna
- Þegar svæðið á milli platnanna er fyllt með rafsvara með rafsvörunarstuðli ϵ skiptum við ϵ_0 út fyrir ϵ
- Ef við stingum jöfnunum fyrir C og v inn í $q = Cv$ þá er
$$q = Cv = \frac{\epsilon A}{d}(Ed) = \epsilon EA = \epsilon \Phi_{\mathrm{E}}$$
þar sem $\Phi_{\mathrm{E}} = EA$ er rafflæðið um flötinn

Færslustraumur

- Þegar þéttirinn hleðst upp er hleðslubreyting á tímaeiningu

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \epsilon \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{E}}}{\mathrm{d}t}$$

- Við köllum þennan straum **færslustraum** og segjum

$$i_{\mathrm{D}} = \epsilon \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{E}}}{\mathrm{d}t}$$

- Þar með gerum við ráð fyrir að breytingin í rafflæði um flötin jafngildi leiðnistraum um yfirborðið í skilningi lögmáls Amperesem við ritum þá á almennara formi

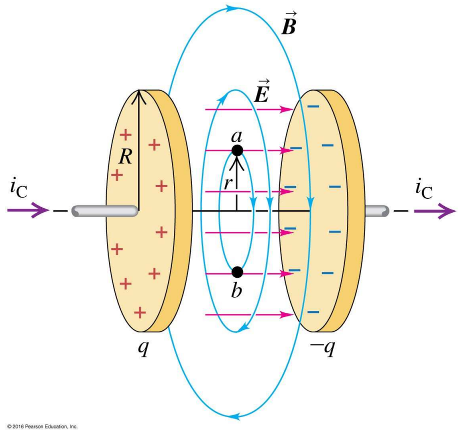
$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\ell = \mu_0 I_{\mathrm{encl}} = \mu_0 (i_{\mathrm{C}} + i_{\mathrm{D}})_{\mathrm{encl}}$$

Færslustraumur

- Það er líka hægt að innleiða raffærslu straumþéttleikann

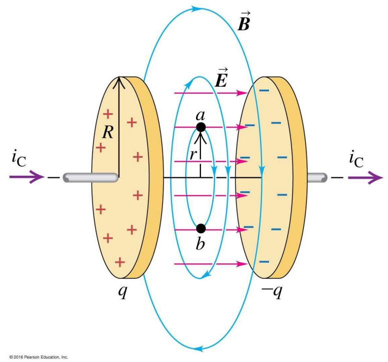
$$j_{\mathrm{D}} = \epsilon \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

- En hefur færslustraumurinn einhverja raunverulega merkingu ?



- Ef að raffærslustraumurinn er raunverulegur ætti að koma fram segulsvið á svæðinu á milli platna þettisins þegar hann er að hlaðast upp

Færslustraumur



- Skoðum þétti með hringlaga skautum af radía R
- Til að ákvarða segulsviðið í staðsetningunni r frá miðás þéttisins
- Skoðum hringinn sem fer um a og b þá er heildarstraumuirnn um hringinn

$$j_D(\pi r^2) = \frac{i_D}{\pi R^2}(\pi r^2)$$

Færslustraumur

- Tegrið $\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\ell$ í lögmáli Ampere er þar með B sinnum ummál hringsins $2\pi r$ og þar sem $i_{\mathrm{D}} = i_{\mathrm{C}}$ fyrir þétti sem er að hlaðast þá gefur lögmál Ampere

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\ell = 2\pi r B = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} i_{\mathrm{C}}$$

  eða

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i_{\mathrm{C}}$$

- Þessi niðurstaða segir á svæðinu á milli platnanna er segulsviðið núll á ás þéttisins og eykst svo línulega með fjarlægð frá ásnum

- Mælingar sýna að þetta segulsvið er fyrir hendi og hegðar sér eins og jafnan segir

Jöfnur Maxwell

- Við getum nú tekið saman öll tengsl rafsviðs og segulsviðs og uppspretta þeirra
- Þessum tengslum er lýst með fjórum jöfnum sem eru nefndar jöfnur Maxwell
- Fyrsta jafnan er einfaldlega lögmál Gauss fyrir rafsvið

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q_{\mathrm{encl}}}{\epsilon_0}$$

og síðan er það sambærileg jafna fyrir segulsvið

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0$$

Jöfnur Maxwell

- Þriðja og fjórða jafnan hafa að geru með línutegur á $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ eftir lokaðri braut
- Lögmál Faraday segir að breytilegt segulflæði sé uppspretta rafsviðs

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\ell = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t}$$

- Lokajafnan er lögmál Ampere

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\ell = \mu_0 \left(i_{\mathrm{C}} + \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{E}}}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathrm{encl}}$$

sem segir að leiðnistraumur og breyting í segulflæði sé uppspretta segulsviðs

Jöfnur Maxwell

- Það má umrita síðari tvær jöfnurnar á jafngilt form

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\ell = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

  og

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\ell = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

- Tímaháð svið af annarri gerðinni spanar svið af hinni gerðinni
- Öll megintengsl milli sviðs og uppspretta þeirra eru falin í jöfnum Maxwells
- Lögmál Coulomb má leiða út frá lögmáli Gauss og lögmál Biot og Savart má leiða út frá lögmáli Ampere o. s. frv.

Frekari upplýsingar

- Þessi kafli er að mestu byggður á kafla 29 hjá Young and Freedman (2015).

Heimildir

Young, H. D. and R. A. Freedman (2015). *University Physics with Modern Physics* (14 ed.). Harlow, England: Pearson Education.