

**Eðlisfræði þéttefnis I:**

# **Flutningsferli**

## **Kaflí 8**

**Jón Tómas Guðmundsson**

**tumi@hi.is**

**9. vika haust 2017**

# Inngangur

- Ýmsir eiginleikar svo sem rafleiðni og varmaleiðni byggja á flutningseiginleikum rafeinda í þéttefni
- Ef bylgjuvirgurinn  $k$  er skilgreindur nákvæmlega þá þýðir það að óvissa er á staðsetningu rafeindar í raunrúminu þar sem bylgjufallið liggur á öllum  $x$ -ásnum
- Ef hins vegar rafeindin er skilgreind á bili  $\Delta x$ , þá er skriðþunginn, eða bylgjuvirgurinn óákveðinn
- Þetta stafar af óvissulögmálinu

$$\Delta p \cdot \Delta x = \hbar \Delta k \cdot \Delta x \sim \hbar$$

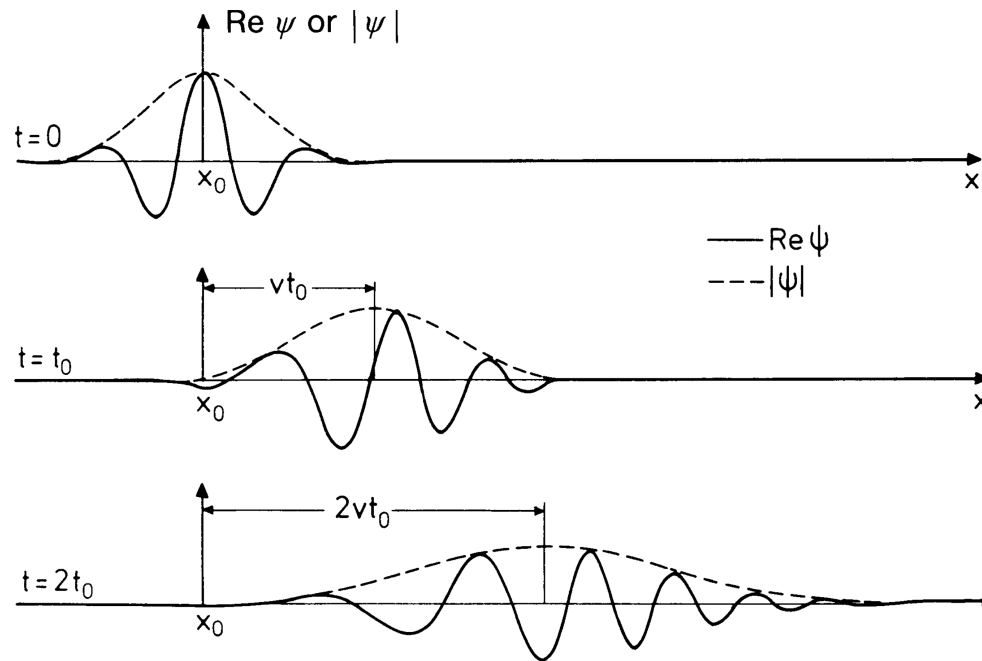
## Hreyfing rafeinda í borða og virkur massi

- Stærðfræðilega má lýsa staðsetningu með því að lýsa rafeind sem bylgjupakka

$$\psi(x, t) \sim \int_{k - \frac{\Delta k}{2}}^{k + \frac{\Delta k}{2}} a(k) \exp [j(kx - \omega(k)t)] dk$$

þar sem  $\omega(k)$  er tvístrunarsambandið

# Hreyfing rafeinda í borða og virkur massi



Frá Ibach and Lüth (2009)

- Færsla bylgjupakka í raunrúminu

## Hreyfing rafeinda í borða og virkur massi

- Hliðrunarhreyfingu bylgjupakkans er lýst með hneppishraðanum

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

sem er hraði massamiðju bylgjupakkans sem er ekki sama og fasahraði planbylgju

$$c = \frac{\omega}{k}$$

- Í kristalli er rafeindum lýst með Bloch bylgjum
- Hraða rafeindar í kristalli er því lýst með hneppishraða Bloch bylgjupakkans

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})$$

## Hreyfing rafeinda í borða og virkur massi

- Fyrir frjálsa rafeind  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$  fæst

$$v = \frac{k\hbar}{m} = \frac{p}{m}$$

- Rafeind í kristalli í ytra rafsviði yfir tímabil  $\delta t$  fær aukna orku sem nemur

$$\delta E = -e\mathcal{E}v_g \delta t$$

þar sem  $v_g$  er hneppishraðinn

- Þannig að

$$\delta E = \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) \delta \mathbf{k} = \hbar \mathbf{v}_g \cdot \delta \mathbf{k}$$

## Hreyfing rafeinda í borða og virkur massi

- Með samanburði sjáum við

$$\delta k = -\frac{e\mathcal{E}}{\hbar}\delta t$$

og þar með

$$\hbar \frac{dk}{dt} = -e\mathcal{E} = F$$

sem er hreyfijafna fyrir frjálsa rafeind

- Kraftliðurinn getur einnig innihaldið Lorentz kraftinn sem verkar á rafeind í segulsviði, það er ef segulsviðið er ekki það sterkt að það brjóti niður borðastrúktúrinn

## Hreyfing rafeinda í borða og virkur massi

- Hreyfijafnan er þá fyrir fast segulsvið

$$\hbar \frac{dk}{dt} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

eða

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{e}{\hbar^2} \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}$$

- Við sjáum að rafeindin ferðast í  $\mathbf{k}$  rúminu í stefnu sem er hornrétt á stigul orkunnar eða að rafeindin ferðast á fastorkuyfirborði



## Hreyfing rafeinda í borða og virkur massi

- Út frá ofansögðu sjáum við að

$$\dot{v}_{gi} = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} (\nabla_{\mathbf{k}} E)_{gi} = \frac{1}{\hbar} \sum_j \frac{\partial^2 E}{\partial k_i \partial k_j} \dot{k}_j = \frac{1}{\hbar^2} \sum_j \frac{\partial^2 E}{\partial k_i \partial k_j} (-e\mathcal{E}_j)$$

og ef borið er saman við

$$F = ma$$

eða

$$a = \frac{F}{m}$$

sjáum við

$$\dot{v}_g = \frac{(-e\mathcal{E})}{m}$$

## Hreyfing rafeinda í borða og virkur massi

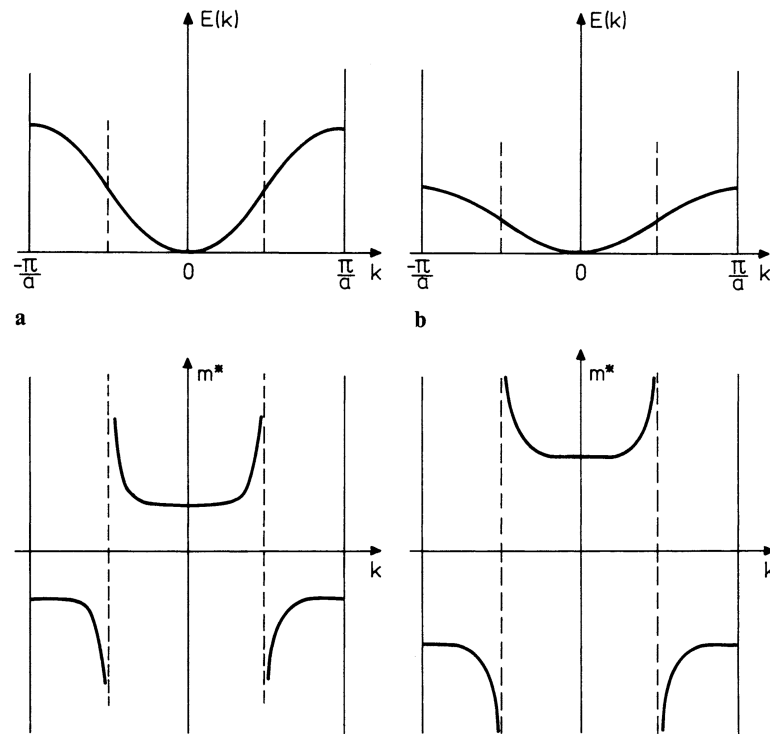
- Massanum  $m$  er skipt út fyrir **virkan massa** (e. effective mass)  $m_{ij}^*$  þar sem

$$\left( \frac{1}{m^*} \right)_{ij} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial k_i \partial k_j}$$

og er einfaldlega krappi  $E(\mathbf{k})$

- Þetta er þinill (e. tensor) sem er samhverfur
- Athugið að  $m^*$  er háð  $\mathbf{k}$

# Hreyfing rafeinda í borða og virkur massi



Frá Ibach and Lüth (2009)

- Virkur massi

## Straumur í borðum

- Hvernig leggja rafeindir með ólíka  $\mathbf{k}$ -vigra til straumsins ?
- Rúmstak  $d\mathbf{k}$  við  $\mathbf{k}$  leggur til straumbéttleika

$$d\mathbf{j}_n = v(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{8\pi^3} = \frac{1}{8\pi^3\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

þar sem ástandsbéttleiki í  $\mathbf{k}$ -rúminu er  $[V/(2\pi)^3]$  eða  $[1/(2\pi)^3]$

- Þar með er fyrir fullsetinn borða

$$\mathbf{j} = -\frac{e}{8\pi^3\hbar} \int_{1\text{st BZ}} \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

## Straumur í borðum

- Fyrir

$$v(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) / \hbar$$

er einnig framlag frá  $v(-\mathbf{k})$  og

$$E(\mathbf{k}) = E(-\mathbf{k})$$

- Heildar straumurinn er tegur yfir setin ástönd í hlutfylltum borða og má því líta á sem straum jákvætt hlaðinna ósetinna ástanda í borðanum
- Þessar quasiagnir eru þekktar sem **holur**
- Þær uppfylla hreyfijöfnurnar
- Holur hegða sér eins og jákvætt hlaðnar agnir

## Straumur í borðum

- Við toppinn gildir fleygboganálgun

$$E(\mathbf{k}) = E_0 - \frac{\hbar^2 k^2}{2|m_{\wedge}^*|}$$

og  $m_{\wedge}^*$  táknar virkan massa við hámark borðans undir rafsviði

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} [\nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})] = -\frac{1}{|m_{\wedge}^*|} \hbar \dot{\mathbf{k}} = \frac{e}{|m_{\wedge}^*|} \mathcal{E}$$

⇒ Dæmi 8.1.

## Boltzmann jafnan og slökunartími

- Flutningsferli hlíta tveimur drífandi kröftum vegna ytra rafsviðs og dreifingu á hleðsluberum vegna hljóðeinda og veilna
- Þessu samspili er lýst með jöfnu Boltzmann
- Við höfum áhuga á að skoða hvernig dreifing hleðslubera í varmajafnvægi er breytt með ytri kröftum og dreifingarferlum
- Við byrjum með Fermi dreifinguna

$$f_0(E(\mathbf{k})) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E(\mathbf{k}) - E_F}{k_B T}\right) + 1}$$

sem er jafnvægisdreifingin  $f_0$  og er óháð staðsetningu þar sem gert er ráð fyrir einsleitni

## Boltzmann jafnan og slökunartími

- Skoðum hvað gerist í ytra sviði
- Undir álögðu ytra rafsviði  $\mathcal{E}$  hefur rafeind við  $\mathbf{r}$  og  $\mathbf{k}$  við tímann  $t$  hnitin

$$\mathbf{r} - \mathbf{v}(\mathbf{k})dt$$

og

$$\mathbf{k} - (-e)\mathcal{E}\frac{dt}{\hbar}$$

- Ef engir eru árekstrar, þá er sérhver rafeind með hnit  $\mathbf{r} - \mathbf{v}dt$  og  $\mathbf{k} + e\mathcal{E}\frac{dt}{\hbar}$  við  $t - dt$  verður að koma til  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{k}$  við tíma  $t$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = f\left(\mathbf{r} - \mathbf{v}dt, \mathbf{k} + e\mathcal{E}\frac{dt}{\hbar}, t - dt\right)$$



## Boltzmann jafnan og slökunartími

- Með árekstrum

$$f(t + dt, \mathbf{r} + d\mathbf{r}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}) - f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = dt \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{arekstrar}}$$

þannig að

$$dt \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) + d\mathbf{r} \nabla_{\mathbf{r}} f + d\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{v}} f = dt \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{arekstrar}}$$

og táknum hröðunarliðinn með

$$\alpha = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

## Boltzmann jafnan og slökunartími

- Þannig að

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}}f + \alpha\nabla_{\mathbf{v}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{arekstrar}}$$

sem er flutningsjafna Boltzmann

- Oft má rita árekstrarliðinn með því að innleiða slökunartímann  $\tau_c(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  skilgreindan með

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{arekstrar}} = -\frac{f - f_0}{\tau_c}$$

- Segjum að ójafnvægi í hraðadreifingu komi til vegna ytra sviðs sem er snögglega fjarlægt

## Boltzmann jafnan og slökunartími

- Þá er slökun dreifingarinnar í átt að jafnvægi

$$\frac{\partial(f - f_0)}{\partial t} = -\frac{f - f_0}{\tau_c}$$

og þar sem  $\partial f_0 / \partial t = 0$  samkvæmt skilgreiningu þá hefur þessi jafna lausnina

$$(f - f_0)_t = (f - f_0)_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)$$

þá er Boltzmann jafnan

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \alpha \nabla_{\mathbf{v}} f + \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}} f = -\frac{f - f_0}{\tau_c}$$

eða

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla_{\mathbf{r}} f - \frac{e}{\hbar} \mathcal{E} \nabla_{\mathbf{k}} f = -\frac{f - f_0}{\tau_c}$$

## Boltzmann jafnan og slökunartími

- Ef  $f$  er óháð staðsetningu  $\nabla_{\mathbf{r}} f = 0$  þá er

$$-\frac{e}{\hbar} \mathcal{E} \nabla_{\mathbf{k}} f = -\frac{f - f_0}{\tau_c}$$

og

$$f(\mathbf{k}) = f_0(\mathbf{k}) + \frac{e}{\hbar} \mathcal{E} \tau_c \nabla_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})$$

- Diffurjöfnuna má leysa með ítrun með því að nálga  $f(\mathbf{k})$  í  $\nabla_{\mathbf{k}} f$  liðnum með jafnvægisdreifingunni
- Þetta gefur lausn sem er línuleg í  $\mathcal{E}$  sem aftur er stungið inn í diffurjöfnuna

## Boltzmann jafnan og slökunartími

- Línulega Boltzmann jafnan er

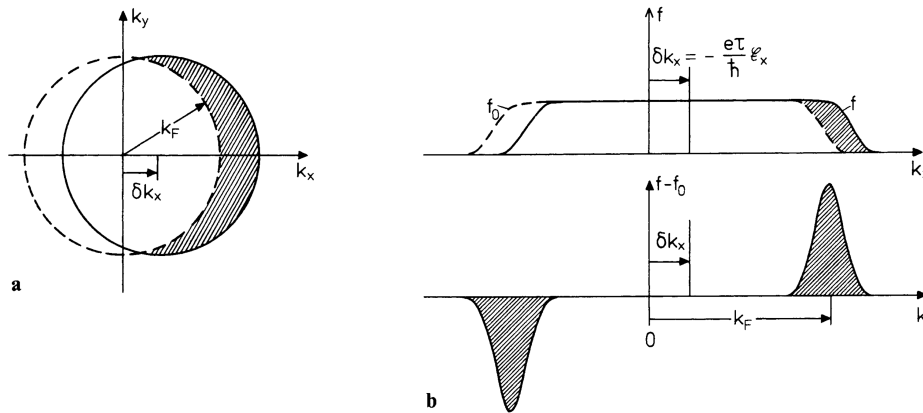
$$f(\mathbf{k}) \simeq f_0(\mathbf{k}) + \frac{e}{\hbar} \mathcal{E} \tau_c \nabla_{\mathbf{k}} f_0(\mathbf{k})$$

og ef rafsviðið er lítið má taka liðun á  $f_0$  þannig að

$$f(\mathbf{k}) \simeq f_0 \left( \mathbf{k} + \frac{e}{\hbar} \mathcal{E} \tau_c \right)$$

þannig að dreifing vegna ytra rafsviðs  $\mathcal{E}$  ásamt með árekstrum má því lýsa með Fermi dreifingu sem er hliðrað með  $e\mathcal{E}\tau_c/\hbar$  frá jafnvægi

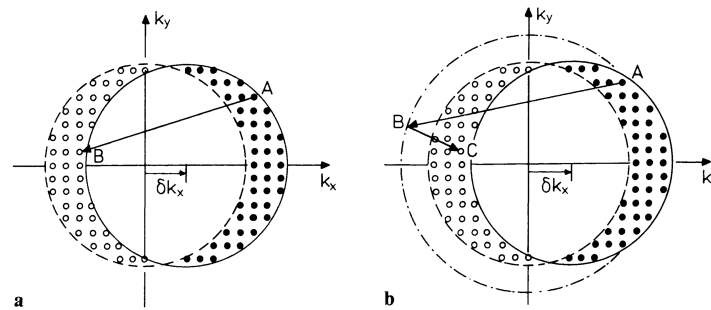
# Boltzmann jafnan og slökunartími



Frá Ibach and Lüth (2009)

- Áhrif fasts rafsviðs  $\mathcal{E}_x$  á dreifingu rafeinda í  $\mathbf{k}$ -rúminu
- Fermi kúlunni er hliðrað sem nemur  $\delta \mathbf{k} = -e\tau \mathcal{E}_x / \hbar$
- Hin nýja Fermidreifing víkur aðeins frá upphaflegri dreifingu í nágrenni við Fermiorkustigið

# Boltzmann jafnan og slökunartími



Frá Ibach and Lüth (2009)

- Dreifing rafeinda í  $k$ -rúminu
- Brotna línan sýnir Fermiyfirborð í varmajafnvægi ( $\mathcal{E} = 0$ )
- Þegar lagt er á rafsvið  $\mathcal{E}_x$  og fastur straumur, þá færast Fermi yfirborðið eins og sýnt er með heila hringnum
- En þar sem A og B eru í mismunandi fjarlægð frá upphafspunkti hnitakerfisins verður þannig að til verður að koma ófjaðrandi atburður
- Ef dreifingin er fjaðrandi verður Fermi kúlan að stækka

## Leiðni í málum – líkan Drude

- Drude lýsti leiðni í málum með því að gera ráð fyrir rafeindagasi í þéttfninu
- Fyrir slíkt rafeindagas undir ytra rafsviði  $\mathcal{E}$ , er hreyfifræði rafeinda lýst með hreyfijöfnunni

$$m\dot{v} + \frac{m}{\tau}v_D = -e\mathcal{E}$$

þar sem dreifingarliðurinn  $(m/\tau)v_D$  er núningur og  $v_D = v - v_{\text{therm}}$  er rekhraði, sem er viðbótarhraði vegna sviðsins sem er umfram varmahraðann  $v_{\text{therm}}$

- Þar sem  $v$  er slakað með veldisfalli aftur í varmahraðann með tímafastu  $\tau_c$  þegar slökkt er á sviðinu, köllum við  $\tau_c$  slökunartíma



## Leiðni í málum – líkan Drude

- Í æstæði ( $\dot{v} = 0$ ) er

$$v_D = -\frac{e\tau_c}{m}\mathcal{E}$$

og þess vegna er straumbéttleikinn

$$j = -env_D = ne\mu\mathcal{E} = \frac{e^2n\tau_c}{m}\mathcal{E}$$

þar sem  $n$  er þéttleiki frjálsra rafeinda og  $\mu$  er hreyfanleikinn, skilgreindur sem hlutfallsfasti milli rekhraða og rafsviðs

$$v_D = \mu\mathcal{E}$$

## Leiðni í málum – líkan Drude

- Sígild leiðni samkvæmt Drude líkaninu

$$\sigma = \frac{j}{\mathcal{E}} = \frac{e^2 n \tau_c}{m}$$

og hreyfanleikinn

$$\mu = \frac{e \tau_c}{m}$$

- Í þessu einfalda líkani leggja allar frjálssar rafeindir til straumsins
- Þetta er í mótsögn við einsetulögmál Pauli
- Fyrir Fermigas þá er rafeindum vel neðan við Fermiorkustigsins meinað að bæta við sig orku þar sem öll nálæg orkustig eru setin

## Leiðni í málmum – líkan Drude

- Skoðum nú strauminn út frá framlagi rafeinda í rúmmáls einingunni  $d\mathbf{k}$  og aðeins setin sæti í  $\mathbf{k}$ -rúminu og sætnilíkur  $f(\mathbf{k})$

$$j_n = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\text{1st BZ}} v(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

og fyrir rafsvið  $\mathcal{E}_x$  í  $x$ -stefnuna

$$j = -\frac{e}{8\pi^3} \int d\mathbf{k} v(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) = -\frac{e}{8\pi^3} \int d\mathbf{k} v(\mathbf{k}) \left[ f_0(\mathbf{k}) + \frac{e\tau_c}{\hbar} \mathcal{E} \frac{\partial f_0}{\partial k_x} \right]$$

fyrir einsleitt efni og teningsgrindur,  $j_y = j_z = 0$

- Þar sem tegrað er yfir allt Brillouin svæðið og  $f_0(\mathbf{k})$  er samhverft um  $\mathbf{k} = 0$  þá núllast tegrið yfir  $v_x f_0$

## Leiðni í málmum – líkan Drude

- Einnig þar sem

$$\frac{\partial f_0}{\partial k_x} = \frac{\partial f_0}{\partial E} \hbar v_x$$

höfum við

$$j_x = -\frac{1}{8\pi^3} \mathcal{E}_x \int d\mathbf{k} v_x^2(\mathbf{k}) \tau_c(\mathbf{k}) \frac{\partial f_0}{\partial E}$$

- Rafleiðnin er þá

$$\sigma = \frac{j_x}{\mathcal{E}_x} = -\frac{e}{8\pi^3} \int d\mathbf{k} v_x^2(\mathbf{k}) \tau_c(\mathbf{k}) \frac{\partial f_0}{\partial E}$$

- orkubilið sem Fermiorkudreifingin  $f_0(E)$  breytist snögglega hefur breidd  $\sim 4k_B T$  og er samhverft um punktinn  $(E_F, f_0(E_F)) = \frac{1}{2}$

## Leiðni í málmum – líkan Drude

- Þetta segir að góð nálgun er

$$\frac{\partial f_0}{\partial E} \approx -\delta(E - E_F)$$

- Einnig er

$$d\mathbf{k} = df_E \frac{dE}{|\nabla_{\mathbf{k}} E|} = df_E \frac{dE}{\hbar v(\mathbf{k})}$$

þannig að

$$\sigma \simeq \frac{e^2}{8\pi^3 \hbar} \int df_E dE \frac{v_x^2(\mathbf{k})}{v(\mathbf{k})} \tau_c(\mathbf{k}) \delta(E - E_F)$$

og þá

$$\sigma \simeq \frac{e^2}{8\pi^3 \hbar} \int_{E=E_F} dE \frac{v_x^2(\mathbf{k})}{v(\mathbf{k})} \tau_c(\mathbf{k}) df_E$$

## Leiðni í málum – líkan Drude

- Almennt taka  $v(\mathbf{k})$  og  $\tau_c(\mathbf{k})$  breytingum á Fermi yfirborðinu
- Meðalgildið

$$\left\langle \frac{v_x^2(\mathbf{k})}{\tau(\mathbf{k})} \right\rangle_{E_F}$$

yfir Fermiyfirborðið má taka út fyrir tegrið

- Fyrir Fermikúlu fyrir nánast frjálssar rafeindir með virkan massa  $m^*$  er þetta meðalgildi einfaldlega

$$\frac{v(E_F)\tau(F)}{3}$$

- Rafleiðni málma er þess vegna yfirborðstegur yfir Fermi-yfirborð í  $k$ -rúmhnitinu

$$E(\mathbf{k}) = E_F$$

## Leiðni í málum – líkan Drude

- Aðeins rafeindir nærri Fermiorkustigunum leggja til rafleiðninnar, eins og vænta má samkvæmt einsetulögmáli Pauli
- Hlutfall rafeinda sem taka þátt er  $v_D/v_F$
- Þéttleiki þessara rafeinda er þess vegna

$$n \frac{v_D}{v_F}$$

og þar sem sérhver rafeind hefur nálega hraðann  $-v_F$  er straumþéttleikinn

$$j = -en \frac{v_D}{v_F} (-v_F) = nev_D$$

## Leiðni í málmum – líkan Drude

- Ef

$$v_D = - \left( \frac{e\tau_c}{m^*} \right) \mathcal{E}$$

fáum við

$$J = \frac{ne^2\tau_F}{m^*} \mathcal{E}$$

þar sem  $\tau_F$  er árekstrartími rafeinda á Fermiyfirborðinu

- Rafleiðnin er þess vegna

$$\sigma = \frac{ne^2\tau_F}{m^*}$$

sem er sama og fengið er sígilt nema hvað  $\tau_c$  er skipt út fyrir  $\tau_F$

- Í raun er straumurinn aðeins borinn með fáum rafeindum sem ferðast á háum hraða, í stað þess að allar ferðist á rekhraðanum  $v_D$
- Báðar aðferðir gefa sömu niðurstöðu



## Leiðni í málmum – líkan Drude

- Þannig að við höfum

$$\sigma \simeq \frac{e^2 \tau_c(E_F)}{m^*} n$$

og

$$\mu \simeq \frac{e^2 \tau_c(E_F)}{m^*}$$

- Þessar jöfnur eru jafngildar Drude líkaninu
- Slökunartíminn, sem var ekki nákvæmlega skilgreindur þar er fyrir rafeindir við Fermi orkustigið, og virkan massa  $m^*$  í staða massa frjálsra rafeinda
- Heildarþéttleiki rafeinda í leiðniborða, sem einnig kemur fyrir í Drude líkaninu

## Leiðni í málmum – líkan Drude

- Til þess að skoða hvernig viðnám málna breytist með hitastigi er nægjanlegt að líta til hvernig  $\tau_c$  hegðar sér sem fall af hitastigi
- Dreifing hleðslubera stafar af hljóðeindum og veilum

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_{\text{ph}}} + \frac{1}{\tau_{\text{defect}}}$$

þar sem  $\tau_{\text{ph}}$  og  $\tau_{\text{defect}}$  eru meðaltímar milli dreifingar frá hljóðeindum og veilum

- Þetta er nefnt **regla Mathiesen**

## Leiðni í málmum – líkan Drude

- Fyrir dreifingu með hljóðeindum er líkindaþversnið drefingarinnar í réttu hlutfalli við meðaltal útslagsins

$$\langle u^2(\mathbf{q}) \rangle$$

og

$$M\omega_{\mathbf{q}}\langle u^2(\mathbf{q}) \rangle = k_{\text{B}}T, \quad T \gg \Theta$$

þannig að

$$\frac{1}{\tau_{\text{ph}}} \sim \langle u^2(\mathbf{q}) \rangle \sim \frac{k_{\text{B}}T}{M\omega_{\mathbf{q}}^2}$$

og tíðni hljóðeindanna  $\omega_{\mathbf{q}}$  inniheldur upplýsingar um fjaðureiginleika efnisins

## Leiðni í málum – líkan Drude

- Gróf nálgun er að setja í stað  $\omega_q^2$  Debye tíðnina  $\omega_D = k_D \Theta / \hbar$  þar sem  $\Theta$  er Debye hitastigið

$$\tau_{\text{ph}} \sim \frac{M\Theta^2}{T} \quad \text{fyrir } T \gg \Theta$$

- Fyrir hitastig  $T < \Theta$ , lækka líkur á hljóðeindaörvun ásamt með lækkandi orku hljóðeinda
- Fyrir  $T < \Theta$  er viðnám málma

$$\rho_{\text{ph}}(T) = A \left( \frac{T}{\Theta} \right)^5 \int_0^{\Theta/T} \frac{x^5 dx}{(\exp x - 1)(1 - \exp(-x))}$$

sem er nefnd jafna Grüneisen

## Leiðni í málum – líkan Drude

- Við lág hitastig er

$$\rho_{\text{ph}} \propto T^5$$

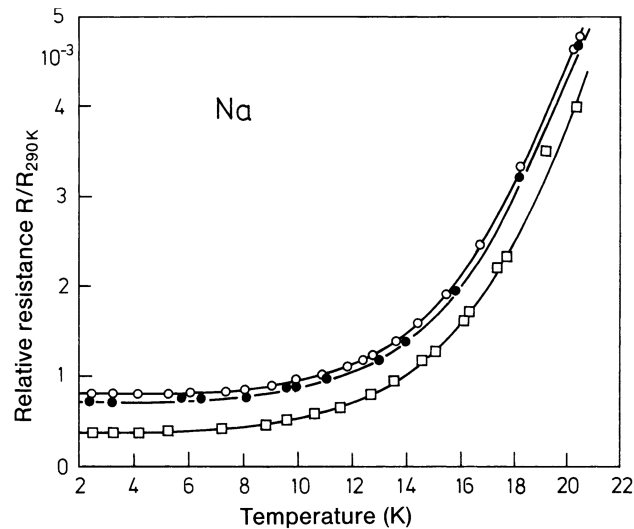
- Við hærri hitastig stefnir tegrið á

$$\frac{1}{4} \left( \frac{T}{\Theta} \right)^4$$

svo að

$$\rho_{\text{ph}} \propto T$$

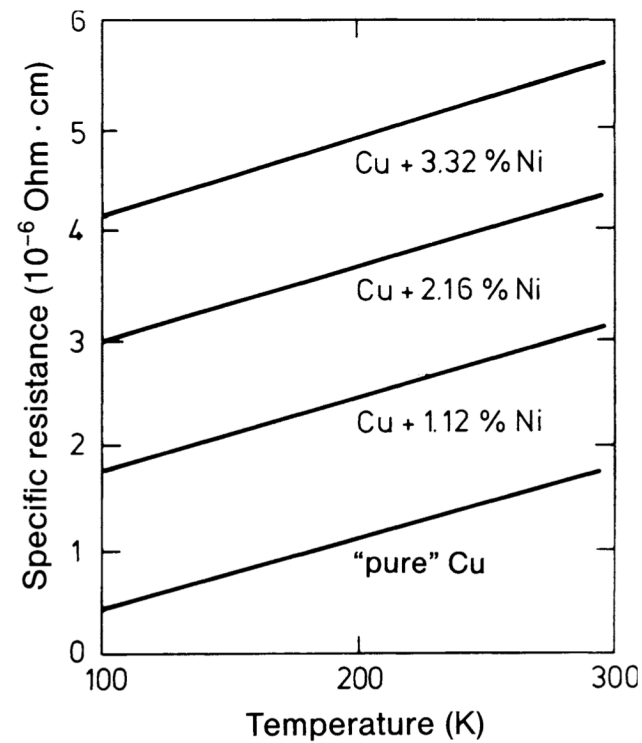
# Leiðni í málmum – líkan Drude



Frá Ibach and Lüth (2009)

- Viðnám Na sem fall af hitastigi
- Neðan við 8 K er viðnámið nánast óháð hitastig, en ræðst af veilupéttleika í sýninu
- Við hærri hitastig er hegðuninni lýst með Grüneisen jöfnunni og ofan við 18 K er hækkar viðnámið línulega með hitastigi

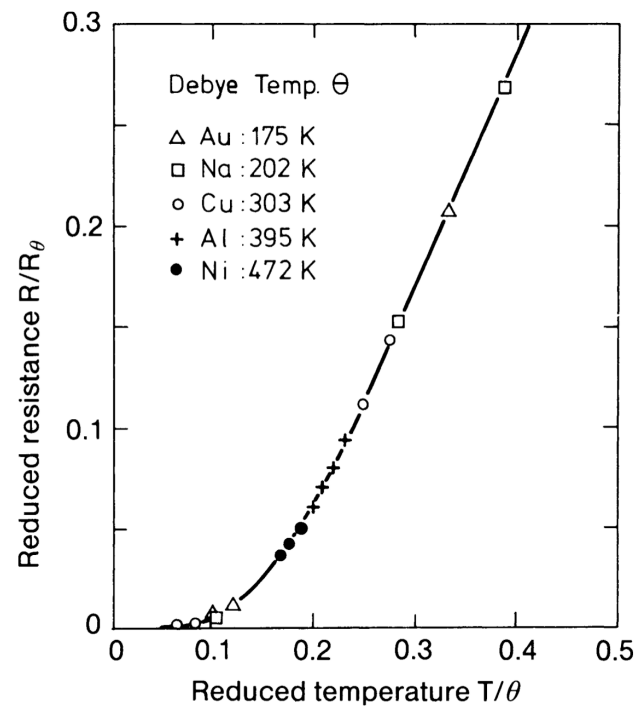
## Leiðni í málmum – líkan Drude



Frá Ibach and Lüth (2009)

- Áhrif veilupéttleika á leiðni kopars

# Leiðni í málum – líkan Drude



Frá Ibach and Lüth (2009)

- Hér sést að Grüneisen jafnan fellur að leiðni ýmissa málma



## Hreyfing í segulsviði

- Hreyfijafna við hliðrun Fermíkúlu agna um  $\delta\mathbf{k}$  þegar kraftur verkar og núningur sem er lýst með árekstri

$$\hbar \left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \delta\mathbf{k} = F$$

- Hröðun frjálstrar agnar er lýst með liðnum

$$\hbar \left( \frac{d}{dt} \right) \delta\mathbf{k}$$

og áhrif árekstra með

$$\hbar \frac{\delta\mathbf{k}}{\tau}$$

þar sem  $\tau$  er árekstartími

## Hreyfing í segulsviði

- Gerum nú ráð fyrir hreyfingu undir einsleitu segulsviði
- Lorentz kraftur á rafeind er þá

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

og ef

$$m\mathbf{v} = \hbar\delta\mathbf{k}$$

þá er hreyfijafnan

$$m \left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \mathbf{v} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

## Hreyfing í segulsviði

- Fyrir segulsvið sem liggur eftir  $z$ -ásnum þá eru hreyfijöfnurnar

$$m \left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_x = -e(E_x + Bv_y)$$

$$m \left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_y = -e(E_y - Bv_x)$$

$$m \left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_z = -eE_z$$

## Hreyfing í segulsviði

- Í æstæði er tímaafleiðan núll svo rekhraðinn er

$$v_x = -\frac{e\tau}{m}E_x - \omega_c\tau v_y$$

$$v_y = -\frac{e\tau}{m}E_y + \omega_c\tau v_x$$

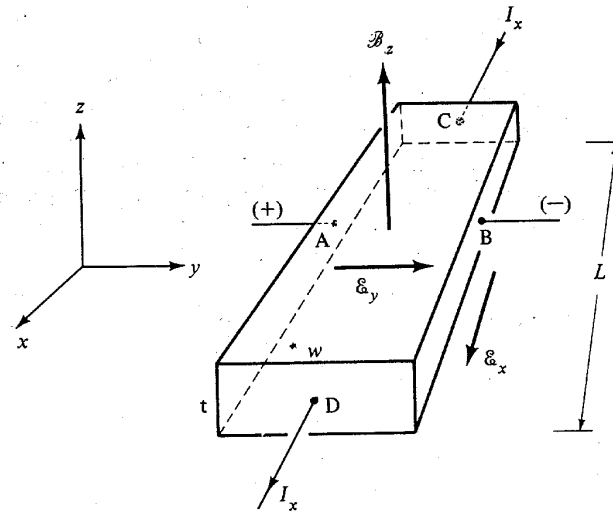
$$v_z = -\frac{e\tau}{m}E_z$$

þar sem

$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$

er hringhraðal tíðni

## Hreyfing í segulsviði: Hall hrif



- Hall svið er rafsvið sem liggur á milli tveggja hliða leiðara í stefnuna  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  þegar straumurinn  $\mathbf{j}$  rennur þvert á segulsviðið  $\mathbf{B}$
- Gerum ráð fyrir sýnisbút þar sem rafsviðið  $E_x$  liggur eftir sýninu endilöngu og segulsviðið er hronrétt á rafsviðsstefnuna

## Hreyfing í segulsviði: Hall hrif

- Ef straumur getur ekki runnið í  $y$ -stefnuna þá verður að setja  $\delta v_y = 0$
- Þetta er einungis mögulegt ef það myndast þversum rafsvið

$$E_y = -\omega_c \tau E_x = \frac{eB\tau}{m} E_x$$

- Stærðin sem skilgreind er með

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B}$$

er nefnd **Hall stuðull**

## Hreyfing í segulsviði: Hall hrif

- Til að finna Hall stuðulinn setjum við

$$j_x = \frac{ne^2\tau E_x}{m}$$

og fáum

$$R_H = -\frac{eB\tau E_x/m}{ne^2\tau E_x B/m} = -\frac{1}{ne}$$

sem er neikvæð stærð fyrir frjálssar rafeindir

⇒ Dæmi 8.2.

⇒ Dæmi 8.3.

⇒ Dæmi 8.4.

## Varmaleiðni í málum

- Áður höfum við séð að varmaleiðni er gefin með

$$\kappa = \frac{1}{3} C v \lambda$$

- Fyrir kúlulaga Fermiyfirborð og þegar  $\tau$  er aðeins háð orku þá er varmaleiðni Fermi gass

$$\kappa_{\text{el}} = \frac{1}{3} C v_{\text{F}}^2 \tau(\mathcal{E}_{\text{F}})$$

þar sem meðalsnertan er

$$\lambda = v_{\text{F}} \tau$$



## Varmaleiðni í málmum

- Nú er

$$C \approx \frac{\pi^2}{2} n \frac{k_B^2 T}{\mathcal{E}_F} = \frac{\pi^2}{2} n k_B \frac{T}{T_F}$$

- Þetta gefur

$$\kappa_{el} = \frac{\pi^2}{3} \frac{n k_B^2 T}{m^* v_F^2} v_F \lambda = \frac{\pi^2 n k_B^2 T \tau}{3 m^*}$$

þar sem

$$\mathcal{E}_F = \frac{1}{2} m^* v_F^2$$

## Varmaleiðni í málum

- Lögmál Wiedermann-Franz segir að hlutfall varmaleiðni málna og rafleiðni er í réttu hlutfalli við hitastig

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\pi^2 n k_B^2 T \tau / 3m^*}{n e^2 \tau / m^*} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 T$$

- Lorentz talan er skilgreind

$$L \equiv \frac{\kappa}{\sigma T}$$

og ætti því að hafa gildið

$$L = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 = 2.34 \times 10^{-8}$$

sem er óháð bæði  $n$  og  $m$

## Varmaleiðni í málumum

málmur	$L \times 10^8$ [W $\Omega$ /K <sup>2</sup> ]	$L \times 10^8$ [W $\Omega$ /K <sup>2</sup> ]
	0° C	100° C
Ag	2.31	2.37
Au	2.35	2.40
Cu	2.23	2.33
Pt	2.51	2.60

## Frekari upplýsingar

- Þessi kafli er að mestu byggður á kafla 9 hjá Ibach and Lüth (2009). Sambærileg umfjöllun er á bls. 140 – 153 og Appendix F hjá Kittel (1986) og kafla 1 hjá Ashcroft and Mermin (1976). Um Drude líkanið er fjallað í kafla 3 hjá Simon (2013). Kafli 16 hjá Simon (2013) fjallar um hvernig þéttfni er skipt í málma, hálfleiðara og einangrara. Frumheimildin fyrir Drude líkaninu er Drude (1900a,b).

## Heimildir

Ashcroft, N. W. and N. D. Mermin (1976). *Solid State Physics*. Philadelphia: Holt, Rinehart and Winston.

Drude, P. (1900a). Zur Elektronentheorie der Metalle. *Annalen der Physik* 306(3), 566–613.

Drude, P. (1900b). Zur Elektronentheorie der Metalle; II. Teil. Galvanomagnetische und thermomagnetische Effecte. *Annalen der Physik* 308(11), 369–402.

Ibach, H. and H. Lüth (2009). *Solid-State Physics: An Introduction to Principles of Materials Science* (4 ed.). Berlin Heidelberg: Springer Verlag.

Kittel, C. (1986). *Introduction to Solid State Physics* (6 ed.). New York: John Wiley & Sons.

Simon, S. H. (2013). *The Oxford Solid State Basics*. Oxford: Oxford University Press.