Greining rása:

Fyrstu gráðu kerfi

Kafli 10

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

1. mars 2005

Inngangur

- Ef rás með rýmd og/eða spani er örvuð með lind sem breytir gildi sínu skyndilega, þá tekur tíma fyrir spennur og strauma í rásinni að komast í stöðugt ástand aftur (ná **æstæðu** gildi).
- Til að lýsa hegðun rásarinnar á þessum tíma (**svipulli hegðun**) þurfum við að leysa diffurjöfnur sem tengja rásabreytur við lindina.
- Látum yfirleitt nægja að skoða rásina fyrir $t > 0$.
- Í þessum kafla verður eingöngu fjallað um fyrstu gráðu rásir, það er rásir sem innihalda eina spólu eða einn þétti.

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.1.

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.2.

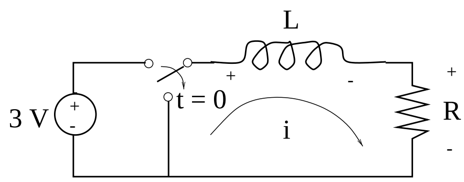
Náttúruleg svörun fyrstu gráðu kerfa:

- Skoðum kerfi sem inniheldur engar lindir virkar eftir tímann $t = 0$. Viljum finna strauma og/eða spennur fyrir $t > 0$.
- Skoðum jöfnuna sem gildir um kerfið fyrir $t > 0$.
- Hún er á forminu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha x = 0$$

fyrir fyrstu gráðu kerfi

Náttúruleg svörun fyrstu gráðu kerfa:



- Beitum KVL á rásina fyrir $t > 0$ og fáum

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0$$

eða

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = 0, \qquad t > 0$$

- Hér ekkert innmerki til staðar.
- Diffurjafnan sem fæst fyrir slíka rás er óhliðruð.
- Skoðum nú hvernig leysa má slíka jöfnu.

Náttúruleg svörun fyrstu gráðu kerfa:

- Setjum fastann $R/L = k$, þá er jafnan,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ki = 0, \qquad t > 0$$

- Við sjáum að fallið $i(t)$ og diffurkvóti þess verða að hafa sama bylgjuformið, annars gæti summa þeirra ekki orðið núll.
- Við vitum að diffurkvóti veldisfalls er einnig veldisfall, prófum því hvort veldisfallið er lausn.
- Giskum á lausn

$$i(t) = Ae^{st}$$

þar sem A og s eru fastar.

Náttúruleg svörun fyrstu gráðu kerfa:

- Þá er

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st}$$

sem við setjum inn í diffurjöfnuna

$$sAe^{st} + kAe^{st} = 0$$

eða

$$s + k = 0$$

eða

$$s = -k$$

svo að lausnin er

$$i(t) = Ae^{-kt}$$

- Við vitum að straumurinn er veldisfall og stuðullinn k ákvarðast af stærð rásaeininganna

Náttúruleg svörun fyrstu gráðu kerfa:

- Jafnan

$$s + k = 0$$

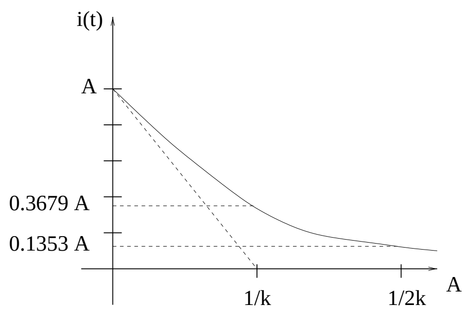
kallast **kennijafna** eða **eiginjafna** kerfisins
- Lausn hennar, $s = -k$ kallast **eigingildi** (**kennigildi**) kerfisins
- Lausn óhliðruðu diffurjöfnunnar kallast **náttúruleg svörun** kerfisins, því hún er eingöngu háð einingum og uppbyggingu kerfisins sjálfs, ekki neinum lindum sem drífa kerfið
- Við tímann $t = 1/k$ er

$$i(t) = i(1/k) = Ae^{-k\left(\frac{1}{k}\right)} = Ae^{-1} = 0.3679 \text{ A}$$

og við tímann $t = 1/2k$ er

$$i(t) = i(1/2k) = Ae^{-k\left(\frac{1}{2k}\right)} = Ae^{-2} = 0.1353 \text{ A}$$

Náttúruleg svörun fyrstu gráðu kerfa:



Hallatalan í $t = 0^+$ er

$$\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = -kAe^{-kt}\Big|_{t=0^+} = -kA$$

Tímastuðullinn er $\tau = 1/k$ þ.e.

$$i(t) = Ae^{-t/\tau}$$

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.3.

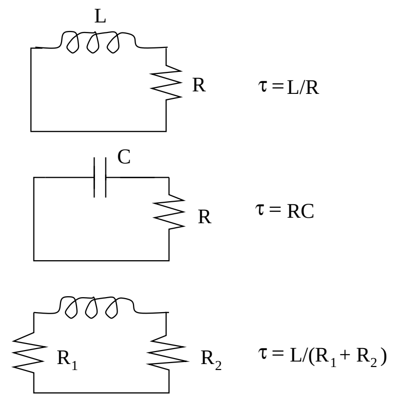
Náttúruleg svörun fyrstu gráðu kerfa:

Náttúrulega svörun rásar sem inniheldur eina spólu eða einn þétti og engar lindir má finna á eftirfarandi hátt:

1. Finna diffurjöfnu sem gildir fyrir tímabilið sem skoða á (venjulega $t > 0$). Þessi diffurjafna er óhliðruð (engar lindir).
2. Giska á lausn á forminu
$$Ae^{st} = x(t)$$
3. Setja þetta fall $x(t)$ og diffurkvóta þess $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ inn í diffurjöfnuna, deila í gegn með Ae^{st} og þá stendur kennijafnan eftir.
4. Finna eigingildið (rót kennijöfnunnar) og setja það inn í lausnina í skrefi 2.

Tímastuðull

- Tímastuðulinn má finna beint út frá gildum rásaeininganna í fyrstu gráðu rásum
- Sé rásin með þétti þá er tímastuðullinn $\tau = RC$; sé rásin með spólu þá er tímastuðullinn $\tau = L/R$, þar sem R er í báðum tilfellum Théveninjafngildisviðnám rásarinnar séð frá þéttinum eða spólunni



Byrjunarskilyrði

- Náttúruleg svöruna allra fyrstu gráðu kerfa er
$$x(t) = Ae^{st}$$
þar sem $x(t)$ er straumurinn eða spennan sem finna á og s er eigingildið (rót kennijöfnunnar), sem er háð gildum rásaeininganna
- Setjum inn $t = 0^+$ og fáum
$$x(0^+) = Ae^{s0} = A$$
- Með því að skoða og greina rásina við tímann $t = 0^+$ má því finna stuðulinn A.

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.4.

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.5.

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.6.

Byrjunarskilyrði

- Stundum eru byrjunarskilyrðin gefin fyrir einhvern tíma $t \neq 0$, þ.e. við þekkjum t.d. $v(t_o)$ en ekki $v(0^+)$
- Svörunin verður þá á forminu
$$v(t) = v(t_o)\exp\left(-(t - t_o)/\tau\right)$$
þ.e. venjuleg svörun sem hliðrað er eftir tímaásnum.

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.7.

Heildarsvörun

- Lítum nú á aðferð til að finna heildarsvörun fyrir línuleg kerfi (ekki bara fyrstu gráðu kerfi)
- Skoðum nú rásir sem eru örvaðar með lindum fyrir $t > 0$

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.8.

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.9.

Heildarsvörun fyrstu gráðu kerfa

Aðferðin til að leysa fyrstu gráðu rásir með lindum er því eftirfarandi:

1. Skrifa diffurjöfnuna fyrir $t > 0$
2. Leysa óhliðruðu diffurjöfnuna (finna náttúrulegu svörunina):
   - Gera ráð fyrir
   $$x_n(t) = Ae^{st}$$
   - Setja $x_n(t)$ inn í óhliðruðu diffurjöfnuna og finna s. A er enn óþekkt.
3. Finna sérlausn x_p sem uppfyllir hliðruðu diffurjöfnuna
4. Leggja saman lausnir úr skrefi 2. og 3.
   $$x(t) = x_n(t) + x_p(t)$$
5. Finna A með hjálp byrjunarskilyrða

Núllástanssvörun og núllinnmerkissvörun fyrstu gráðu kerfa

Höfum séð að heildarsvörun kerfis er summa náttúrulegu lausnarinnar og sérlausnarinnar.

En við getum einnig hugsað okkur að heildar lausnin sé sett saman úr tveimur öðrum þáttum:

- **Núllinnmerkislausn**, sem er svörun eða örvun með upphafsgildum eingöngu (engar lindir)
- **Núllástandslausn**, sem er svörun við örvun með innmerki eingöngu (upphafsgildi öll núll).

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.10.

Þrepsvörun og impúlssvörun fyrstu gráðu kerfa

Þrepsvörun og **impúlssvörun** fyrstu gráðu kerfa eru skilgreindar sem núllástandslausn kerfisins þegar innmerkið er einingarþrep eða einingarimpúls (straumur eða spenna).

Engin orka er þá geymd í rásinni við tímann $t = 0$.

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.11.

Ef straumur í þétti er impúls, þ.e.

$$i_C(t) = \delta(t)$$

þá stekkur spennan upp um $1/C$ volt, þ.e.

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau + v_C(0^-)$$

eða

$$v_C(0^+) - v_C(0^-) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{C}$$

Þrepsvörun og impúlssvörun fyrstu gráðu kerfa

Á sama hátt gildir að ef spenna yfir spólu er impúls, þ.e.

$$v_L(t) = \delta(t)$$

þá stekkur straumurinn upp um $1/L$ amper, þ.e.

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} v_L(\tau)\mathrm{d}\tau + i_L(0^-)$$

eða

$$i_L(0^+) - i_L(0^-) = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{L}$$

Núllástandssvörun (heildarsvörun línulegrar rásar sem hefur enga orku geymda við $t = 0$) við örvun með einingarimpúlsi $\delta(t)$ er kölluð impúlssvörun rásarinnar $h(t)$.

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.12.

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.13.

Þrepsvörun og impúlssvörun fyrstu gráðu kerfa

Ef við þekkjum innmerki $x(t)$ og tilsvarandi útmerki (núllástandssvörun) $y(t)$ fyrir línulegt kerfi og örvum síðan sama kerfi með innmerkinu $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ þá er útmerkið $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$

Impúlssvörun má finna með því að diffra þrepsvörunina.

$\Longrightarrow$ Dæmi 10.14.

Heildarsvörun fundin með tegrun

Óhliðruðu fyrstu gráðu jöfnurnar sem við fáum eru á forminu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha x = f(t)$$

og þær má ætíð leysa fyrir $x(t)$ á eftirfarandi hátt:

Margföldum báðar hliðar jöfnunnar með $e^{\alpha t}$ þ.a.

$$e^{\alpha t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha e^{\alpha t}x = e^{\alpha t}f(t)$$

sem skrifa má

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{\alpha t}x) = e^{\alpha t}f(t)$$

Tegrum báðar hliðar frá $-\infty$ til t

$$\begin{aligned} xe^{\alpha t} &= \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{0^-} e^{\alpha\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{0^-}^{t} e^{\alpha\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Heildarsvörun fundin með tegrun

Fyrra tegrið er fasti, því mörkin eru fastar:

$$xe^{\alpha t} = K + \int_{0^-}^{t} e^{\alpha\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Margföldum með $e^{-\alpha t}$

$$x(t) = Ke^{-\alpha t} + \int_{0^-}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

þar sem fastinn K ákvarðast af byrjunar-skilyrðum; $Ke^{-\alpha t}$ er núllinnmerkislausn og

$$\int_{0^-}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

er núllástandslausn.

Heimildir

[1] D. E. Scott, *An Introduction to Circuit Analysis - A Sys tems Approach*, McGraw-Hill, 1987, Kafli 6

[2] R.A. DeCarlo og Pen-Min Lin,*Linear Circuit Analysis: Time Domain, Phasor and Laplace Transform Approaches*, Oxford University Press, 2001, Kafli 8