

Greining rása:

# Merki

## Kafi 6

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

6. vika 2006

1

## Inngangur

- Hingað til hefur aðeins verið fjallað um jafnspennurásir, þ.e. rásir þar sem spennur og straumar eru fastar og breytast ekki með tíma.
- Þegar lindarspennur og -straumar breytast með tíma er þeim lýst með tímaföllum sem við köllum **merki**
- Algengasta fallið er sínusfallið. Veituspennan er sínuslaga, svo og öll radiómerki.

2

## Einingarþrepfallið

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{ef } t > 0 \\ 0 & \text{ef } t < 0 \end{cases}$$

Það er óskilgreint í  $t = 0$ .

Straumlind eða spennulind sem kveikt er á eða slökkt á við tímann  $t = t_o$  má lýsa með einingarþrepfallinu.

⇒ Dæmi 6.1.

⇒ Dæmi 6.2.

⇒ Dæmi 6.3.

⇒ Dæmi 6.4.

3

## MATLAB

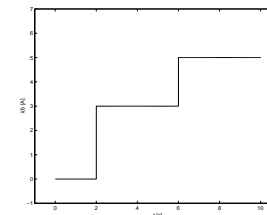
Í MATLAB er summa einingarþrepfalla

$$f(t) = 2u(t - 6) + 3u(t - 2)$$

teiknuð með

```
t=0:0.001:10; i1 = 2 * stepfun(t,6); i2 = 3 * stepfun(t,2); i3 = i1 + i2;
figure(1)
plot(t,i3); xlabel('t [s]'); ylabel('i(t) [A]'); axis([-1 11 -1 7]); print -deps 'step.eps'
```

sem gefur



4

## Einingarimpúlsinn

- Skoðum púls (ferkanntaðan) með flatarmálið 1. Púlsinn  $f_p(t)$  varir í  $\Delta$  sekúndur og hefur hæðina  $1/\Delta$ .
- Látum nú  $\Delta \rightarrow 0$ , og þá verður púlsinn mjórri og hærri.
- Markgildið er óendanlega hár og óendanlega mjór púls sem hefur flatarmálið 1. Þetta er **einingarimpúlsinn**

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} f_p(t)$$

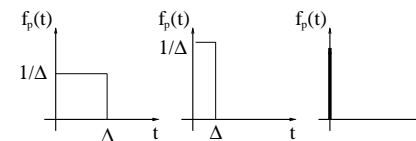
þar sem

$$f_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{ef } 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- Við sjáum að impúlsfallið er allsstaðar núll nema þar sem frumbreyta þess er núll, þar er það óendanlega hátt.

5

## Einingarimpúlsinn



Ef púlsinn var upphaflega  $K/\Delta$  á hæð og  $\Delta$  á breidd, þá er flatarmál hans  $(K/\Delta)\Delta = K$  og skrifa má hann sem

$$f(t) = K f_p(t)$$

þá fæst

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} K f_p(t) = K \lim_{\Delta \rightarrow 0} f_p(t) = K \delta(t)$$

þ.e. það að margfalda impúls með tölu (fasta) breytir aðeins flatarmáli hans, ekki hæð né breidd.

6

## Einingarimpúlsinn

- Diffurkvóti einingarþrepfallsins er allsstaðar núll, nema við  $t = 0$ , þar er hann óendanlega hár, samanber impúls.
- Nálgum  $u(t)$  með  $\tilde{u}(t)$  svo

$$u(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{u}(t)$$

- Diffurkvóti  $\tilde{u}(t)$  er einingarimpúlsinn

$$\frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = f_p(t)$$

en þegar  $\Delta \rightarrow 0$  verður

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} f_p(t) = \delta(t)$$

þ.e. einingarimpúlsinn er diffurkvóti einingarþrepfallsins.

7

## Einingarimpúlsinn

- Impúlsinn er ekki fall í ströngustu merkingu. Spennulind sem gefur impúls, t.d.  $v(t) = 10\delta(t)$  er heldur ekki til.
- En það er hægt að búa til nálgun á impúls, t.d. spennulind sem fer frá 0 til 1.000.000 V og aftur í 0 á um  $1 \mu s$ , sem er nægilega góð nálgun í flestum tilfellum.
- Einingarflatarmálið kemur til vegna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = u(0^+) - u(0^-) = 1$$

⇒ Dæmi 6.5.

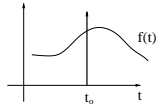
8

## Einingarimpúlsinn

Almennt má finna

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_o)dt$$

þ.e. tegrið af einhverju falli  $f(t)$  margfölduðu með impúlsi við tímann  $t_o$ .

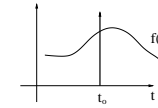


Þessi stærð er núll allsstaðar nema í  $t = t_o$  (því  $\delta(t - t_o)$  er núll nema í  $t = t_o$ ). Því má skrifa tegrið sem

$$I = \int_{t_{o-}}^{t_{o+}} f(t)\delta(t - t_o)dt$$

9

## Einingarimpúlsinn



Gerum síðan ráð fyrir að  $f(t)$  breytist ekki yfir örstutt tímabilið  $[t_{o-}, t_{o+}]$  og meðhöndlum fallið  $f(t)$  sem fasta  $f(t_o)$ ; og tökum út fyrir og fáum

$$I = f(t_o) \int_{t_{o-}}^{t_{o+}} \delta(t - t_o)dt = f(t_o)$$

Því að tegrið af impúlsinum er 1.

Almennt er

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_o)dt = f(t_o)$$

⇒ Dæmi 6.6.

10

## Einingarrampinn

Skoðum nú tegrið af einingarþrepfallinu

$$\int_{-\infty}^t u(\tau - t_o)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{ef } t < t_o \\ t - t_o & \text{ef } t > t_o \end{cases}$$

eða

$$\int_{-\infty}^t u(\tau - t_o)d\tau = (t - t_o)u(t - t_o)$$

Skilgreinum **einingarrampann**  $r(t)$  sem

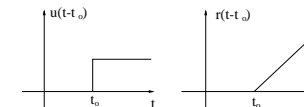
$$r(t) = tu(t)$$

eða

$$r(t - t_o) = (t - t_o)u(t - t_o)$$

11

## Einingarrampinn



Almennt má rita

$$\int_{-\infty}^t u(\tau - t_o)d\tau = r(t - t_o)$$

Hallatala einingarrampans er 1 fyrir  $t > t_o$  og 0 fyrir  $t \leq t_o$ , þ.e.

$$\frac{d}{dt}r(t - t_o) = u(t - t_o)$$

Við getum haldið áfram og skilgreint einingar-fleygboga, einingar-þriðjugráðufall o.s.frv.

12

## Veldisfallið

Algengt merki er

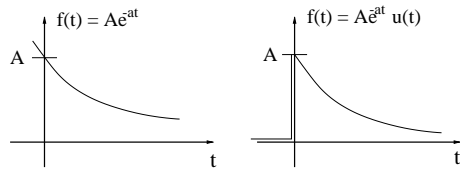
$$f(t) = Ae^{-at}$$

Við vitum að  $e^0 = 1$  svo að  $f(0) = Ae^0 = A$ .

Fyrir  $t < 0$  þá er  $f(t) > A$ .

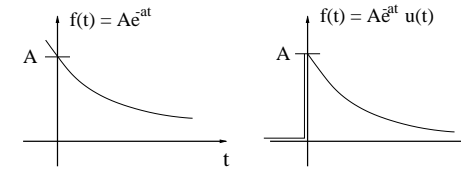
Ef veldisfallið er margfaldað með einingarþrepi þá fæst fall sem er núll fyrir  $t < 0$  en veldisfall fyrir  $t > 0$ , þ.e.

$$f(t) = Ae^{-at}u(t)$$



13

## Veldisfallið



Tímastuðull veldisfallsins er skilgreindur með

$$\tau = \frac{1}{a}$$

og við  $t = \tau$  fæst

$$f(\tau) = Ae^{-\frac{1}{\tau}\tau} = A\frac{1}{e}$$

14

## Veldisfallið

Diffurkvóti veldisfallsins er aftur veldisfall

$$f(t) = Ae^{-at}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = -aAe^{-at}$$

Ef veldisfallið er margfaldað með einingarþreppi og diffráð þá fæst

$$\frac{df(t)}{dt} = A(e^{-at}\delta(t) - ae^{-at}u(t))$$

eða

$$\frac{df(t)}{dt} = A(\delta(t) - ae^{-at}u(t))$$

⇒ Dæmi 6.7.

15

## Sínusfallið

- Algengasta fallið er sínusfallið
- Við notum sínus og cosínus jöfnum höndum
- Dæmi um slíkt fall er

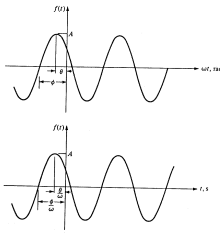
$$f(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

þar sem  $A$ ,  $\omega$  og  $\theta$  eru fastar

- $A$  er útslag merkisins
- $\omega$  er horn tíðni
- $t$  er tími
- $\theta$  er fasahorn

16

## Sínusfallið

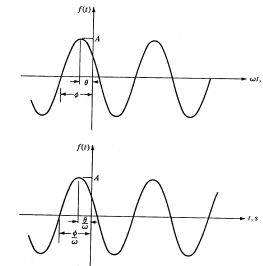


- **Lotan**  $T$  er sá tími sem það tekur frumbreytu fallsins að fara frá 0 til  $2\pi$ , þ.e. ef við tímamann  $t_1$  gildir  $\omega t_1 + \theta = 0$  þá er  $t_1 = -\theta/\omega$  og við tímamann  $t_2$  gildir  $\omega t_2 + \theta = 2\pi$  þá er  $t_2 = 2\pi - \theta/\omega$ , þá er lota skilgreind sem

$$T = t_2 - t_1 = \frac{2\pi - \theta}{\omega} + \frac{\theta}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

17

## Sínusfallið



$$f(t) = A \cos(\omega t + \theta) = A \sin(\omega t + \phi)$$

og

$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2}$$

Fallið endurtekur sig á  $2\pi$  radiana fresti eða á  $T$  sekúndna fresti

18

## Sínusfallið

Því gildir

$$f(t) = f(t + nT) \quad n \in \mathbb{Z}$$

eða

$$\begin{aligned} f(t + nT) &= A \cos(\omega(t + nT) + \theta) \\ &= A \cos(\omega t + \omega nT) + \theta) \\ &= A \cos(\omega t + \omega n \frac{2\pi}{\omega} + \theta) \\ &= A \cos(\omega t + \theta + 2n\pi) \\ &= A \cos(\omega t + \theta) = f(t) \end{aligned}$$

19

## Sínusfallið

- Tímabilið  $T$  ákvarðar eina sveiflu af bylgjunni og einingin er sekúndur per sveiflu
- Andhverfa stærðin hefur eininguna sveiflur á sekúndu eða rið [Hz, Hertz] og kallast **tíðni**  $f$ , þ.e.

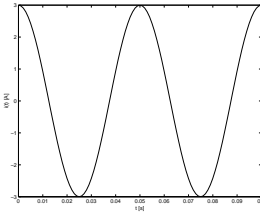
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

eða

$$\omega = 2\pi f$$

20

## Sínusfallið



Sagt er að sínusfallið sé  $\pi/2$  rad ( $90^\circ$ ) á eftir cosínusfallinu og að cosínusfallið sé  $\pi/2$  rad ( $90^\circ$ ) á undan sínusfallinu

$$\cos \omega t = \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin \omega t = \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

## Frekara lesefni

Um einingarþrepfallið og rampafallið er fjallað í kafla 3 hjá Scott (1987) og í kafla 13.4 hjá DeCarlo and Lin (2001).

## References

DeCarlo, R. A. and P.-M. Lin (2001). *Linear Circuit Analysis: Time Domain, Phasor and Laplace Transform Approaches* (2 ed.). New York: Oxford University Press.

Scott, D. E. (1987). *An Introduction to Circuit Analysis - A Systems Approach*. New York: McGraw-Hill.