

Greining rása:

Merki

Kafi 6

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

6. vika 2007

1

Inngangur

- Hingað til hefur aðeins verið fjallað um jafnspennurásir, þ.e. rásir þar sem spennur og straumar eru fastar og breytast ekki með tíma.
- Þegar lindarspennur og -straumar breytast með tíma er þeim lýst með tímaföllum sem við köllum **merki**
- Algengasta fallið er sínusfallið. Veituspennan er sínuslaga, svo og öll radiómerki.

2

Einingarþrepfallið

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{ef } t > 0 \\ 0 & \text{ef } t < 0 \end{cases}$$

Það er óskilgreint í $t = 0$.

Straumlind eða spennulind sem kveikt er á eða slökkt á við tímamann $t = t_o$ má lýsa með einingarþrepfallinu.

⇒ Dæmi 6.1.

⇒ Dæmi 6.2.

⇒ Dæmi 6.3.

⇒ Dæmi 6.4.

3

MATLAB

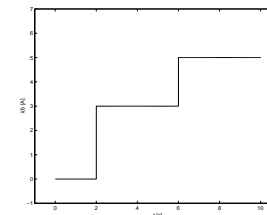
Í MATLAB er summa einingarþrepfalla

$$f(t) = 2u(t - 6) + 3u(t - 2)$$

teiknuð með

```
t=0:0.001:10; i1 = 2 * stepfun(t,6); i2 = 3 * stepfun(t,2); i3 = i1 + i2;
figure(1)
plot(t,i3); xlabel('t [s]'); ylabel('i(t) [A]'); axis([-1 11 -1 7]); print -deps 'step.eps'
```

sem gefur



4

Einingarimpúlsinn

- Skoðum púls (ferkanntaðan) með flatarmálið 1. Púlsinn $f_p(t)$ varir í Δ sekúndur og hefur hæðina $1/\Delta$.
- Látum nú $\Delta \rightarrow 0$, og þá verður púlsinn mjórri og hærri.
- Markgildið er óendanlega hár og óendanlega mjór púls sem hefur flatarmálið 1. Þetta er **einingarimpúlsinn**

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} f_p(t)$$

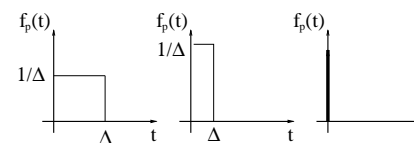
þar sem

$$f_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{ef } 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- Við sjáum að impúlsfallið er allsstaðar núll nema þar sem frumbreyta þess er núll, þar er það óendanlega hátt.

5

Einingarimpúlsinn



Ef púlsinn var upphaflega K/Δ á hæð og Δ á breidd, þá er flatarmál hans $(K/\Delta)\Delta = K$ og skrifa má hann sem

$$f(t) = K f_p(t)$$

þá fæst

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} K f_p(t) = K \lim_{\Delta \rightarrow 0} f_p(t) = K \delta(t)$$

þ.e. það að margfalda impúls með tölu (fasta) breytir aðeins flatarmáli hans, ekki hæð né breidd.

6

Einingarimpúlsinn

- Diffurkvóti einingarþrepfallsins er allsstaðar núll, nema við $t = 0$, þar er hann óendanlega hár, samanber impúls.
- Nálgum $u(t)$ með $\tilde{u}(t)$ svo

$$u(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{u}(t)$$

- Diffurkvóti $\tilde{u}(t)$ er einingarimpúlsinn

$$\frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = f_p(t)$$

en þegar $\Delta \rightarrow 0$ verður

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} f_p(t) = \delta(t)$$

þ.e. einingarimpúlsinn er diffurkvóti einingarþrepfallsins.

7

Einingarimpúlsinn

- Impúlsinn er ekki fall í ströngustu merkingu. Spennulind sem gefur impúls, t.d. $v(t) = 10\delta(t)$ er heldur ekki til.
- En það er hægt að búa til nálgun á impúls, t.d. spennulind sem fer frá 0 til 1.000.000 V og aftur í 0 á um 1 μs , sem er nægilega góð nálgun í flestum tilfellum.
- Einingarflatarmálið kemur til vegna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = u(0^+) - u(0^-) = 1$$

⇒ Dæmi 6.5.

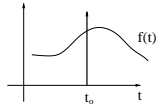
8

Einingarimpúlsinn

Almennt má finna

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_o)dt$$

þ.e. tegrið af einhverju falli $f(t)$ margfölduðu með impúlsi við tímann t_o .

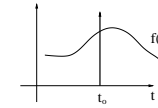


Þessi stærð er núll allsstaðar nema í $t = t_o$ (því $\delta(t - t_o)$ er núll nema í $t = t_o$). Því má skrifa tegrið sem

$$I = \int_{t_{o-}}^{t_{o+}} f(t)\delta(t - t_o)dt$$

9

Einingarimpúlsinn



Gerum síðan ráð fyrir að $f(t)$ breytist ekki yfir örstutt tímabilið $[t_{o-}, t_{o+}]$ og meðhöndlum fallið $f(t)$ sem fasta $f(t_o)$; og tökum út fyrir og fáum

$$I = f(t_o) \int_{t_{o-}}^{t_{o+}} \delta(t - t_o)dt = f(t_o)$$

Því að tegrið af impúlsinum er 1.

Almennt er

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_o)dt = f(t_o)$$

⇒ Dæmi 6.6.

10

Einingarrampinn

Skoðum nú tegrið af einingarþrepfallinu

$$\int_{-\infty}^t u(\tau - t_o)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{ef } t < t_o \\ t - t_o & \text{ef } t > t_o \end{cases}$$

eða

$$\int_{-\infty}^t u(\tau - t_o)d\tau = (t - t_o)u(t - t_o)$$

Skilgreinum **einingarrampann** $r(t)$ sem

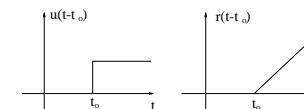
$$r(t) = tu(t)$$

eða

$$r(t - t_o) = (t - t_o)u(t - t_o)$$

11

Einingarrampinn



Almennt má rita

$$\int_{-\infty}^t u(\tau - t_o)d\tau = r(t - t_o)$$

Hallatala einingarrampans er 1 fyrir $t > t_o$ og 0 fyrir $t \leq t_o$, þ.e.

$$\frac{d}{dt}r(t - t_o) = u(t - t_o)$$

Við getum haldið áfram og skilgreint einingar-fleygboga, einingar-þriðjugráðufall o.s.frv.

12

Veldisfallið

Algengt merki er

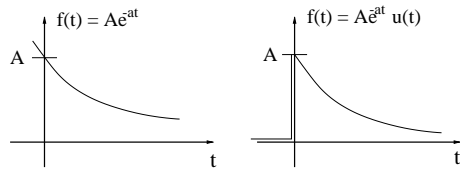
$$f(t) = Ae^{-at}$$

Við vitum að $e^0 = 1$ svo að $f(0) = Ae^0 = A$.

Fyrir $t < 0$ þá er $f(t) > A$.

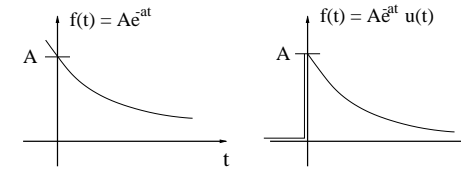
Ef veldisfallið er margfaldað með einingarþrepi þá fæst fall sem er núll fyrir $t < 0$ en veldisfall fyrir $t > 0$, þ.e.

$$f(t) = Ae^{-at}u(t)$$



13

Veldisfallið



Tímastuðull veldisfallsins er skilgreindur með

$$\tau = \frac{1}{a}$$

og við $t = \tau$ fæst

$$f(\tau) = Ae^{-\frac{1}{\tau}\tau} = A\frac{1}{e}$$

14

Veldisfallið

Diffurkvóti veldisfallsins er aftur veldisfall

$$f(t) = Ae^{-at}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = -aAe^{-at}$$

Ef veldisfallið er margfaldað með einingarþreppfalli og diffrað þá fæst

$$\frac{df(t)}{dt} = A(e^{-at}\delta(t) - ae^{-at}u(t))$$

eða

$$\frac{df(t)}{dt} = A(\delta(t) - ae^{-at}u(t))$$

⇒ Dæmi 6.7.

15

Sínusfallið

- Algengasta fallið er sínusfallið
- Við notum sínus og cosínus jöfnum höndum
- Dæmi um slíkt fall er

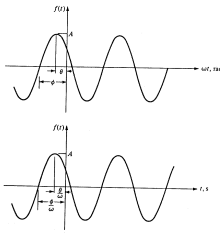
$$f(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

þar sem A , ω og θ eru fastar

- A er útslag merkisins
- ω er horn tíðni
- t er tími
- θ er fasahorn

16

Sínusfallið

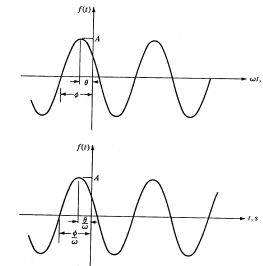


- **Lotan** T er sá tími sem það tekur frumbreytu fallsins að fara frá 0 til 2π , þ.e. ef við tímamann t_1 gildir $\omega t_1 + \theta = 0$ þá er $t_1 = -\theta/\omega$ og við tímamann t_2 gildir $\omega t_2 + \theta = 2\pi$ þá er $t_2 = 2\pi - \theta/\omega$, þá er lota skilgreind sem

$$T = t_2 - t_1 = \frac{2\pi - \theta}{\omega} + \frac{\theta}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

17

Sínusfallið



$$f(t) = A \cos(\omega t + \theta) = A \sin(\omega t + \phi)$$

og

$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2}$$

Fallið endurtekur sig á 2π radiana fresti eða á T sekúndna fresti

18

Sínusfallið

Því gildir

$$f(t) = f(t + nT) \quad n \in \mathbb{Z}$$

eða

$$\begin{aligned} f(t + nT) &= A \cos(\omega(t + nT) + \theta) \\ &= A \cos(\omega t + \omega nT) + \theta) \\ &= A \cos(\omega t + \omega n \frac{2\pi}{\omega} + \theta) \\ &= A \cos(\omega t + \theta + 2n\pi) \\ &= A \cos(\omega t + \theta) = f(t) \end{aligned}$$

19

Sínusfallið

- Tímabilið T ákvarðar eina sveiflu af bylgjunni og einingin er sekúndur per sveiflu
- Andhverfa stærðin hefur eininguna sveiflur á sekúndu eða rið [Hz, Hertz] og kallast **tíðni** f , þ.e.

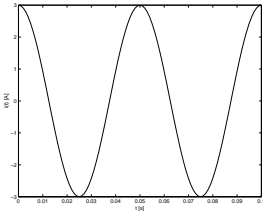
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

eða

$$\omega = 2\pi f$$

20

Sínusfallið



Sagt er að sínusfallið sé $\pi/2$ rad (90°) á eftir cosínusfallinu og að cosínusfallið sé $\pi/2$ rad (90°) á undan sínusfallinu

$$\cos \omega t = \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin \omega t = \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Frekara lesefni

Um einingarþrepfallið og rampfallið er fjallað í kafla 3 hjá Scott (1987) og í kafla 13.4 hjá DeCarlo and Lin (2001).

References

DeCarlo, R. A. and P.-M. Lin (2001). *Linear Circuit Analysis: Time Domain, Phasor and Laplace Transform Approaches* (2 ed.). New York: Oxford University Press.

Scott, D. E. (1987). *An Introduction to Circuit Analysis - A Systems Approach*. New York: McGraw-Hill.