

# Greining rása:

# Grunnhugtök

## Kaffi 1

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

1. vika 2008

1

## Inngangur

- Í þessu námskeiði greinum við línulegar rafrásir
- Rás er samtenging rásaeyninga, sem meðhöndla orku eða upplýsingar
- Mikilvægur eiginleiki línulegrar rásar er að útslag útmerkis er í réttu hlutfalli við útslag innmerkis
- Greining rása veitir undirstöðu fyrir nokkur megin svið rafmagnsverkfræðinnar: rafeindatækni, raforkukerfi, fjarskiptafræði og stýritækni
- Fyrst verða innleidd helstu hugtök sem notuð eru í rafmagnsfræði

2

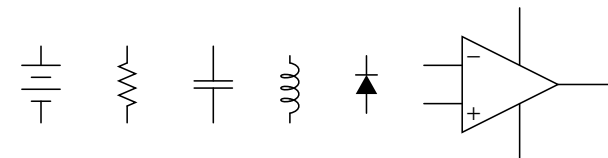
## Grunnhugtök

- **Hleðsla** er rafeiginleiki efnis.
- Efnið samanstendur af **frumeindum**.
- Frumeindir eru jákvætt hlaðnar róteindir og óhlaðnar nifteindir sem eru umvafðar skýi af neikvætt hlöðnum rafeindum.
- Hleðsla einnar rafeindar er  $-1.6 \times 10^{-19}$  Coulomb.
- Við notum táknið  $q(t)$  til að tákna hleðslu sem tiltekið efnismagn hefur á hverjum tíma.
- **Leiðari** er efni, venjulega málmur, þar sem rafeindir geta flust til nálægra frumeinda tiltölulega auðveldlega.
- **Rásir** eru orku eða merkis/upplýsinga gjörvar sem samanstanda af tengingum á einingum eða tólum.

3

## Grunnhugtök - Rásaeyningar

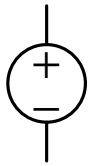
- Meðhöndlun orku eða upplýsinga fer fram um tímaháð merki sem kölluð eru **spenna** og **straumur**
- Samspil **rásaeyninga** breytir merkinu í nýjar spennur og strauma
- Dæmi um rásaeyningar eru, **rafhlaða**, **viðnám**, **þéttir**, **spóla**, **tvívistur** og **aðgerðamagnari**



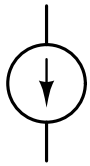
4

## Grunnhugtök - Rásaeiningar

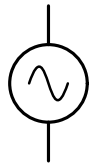
- Eining kölluð **lind** framkallar spennu eða straum sem stendur fyrir tilteknar upplýsingar.



Jafnspennulind



Straumlind

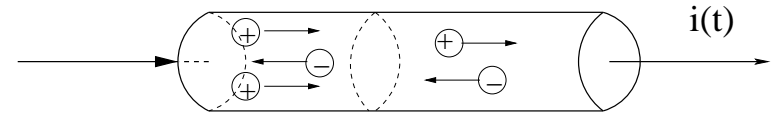


Riðspennulind

5

## Grunnhugtök - Straumur

- Straumur.** Þegar hlaðnar agnir flytjast í gegnum yfirborð, t.d. þverskurð leiðara, þá nefnist heildar hleðslutilfærsla á tímaeiningu, straumur.



- Straumur hefur eininguna A (Amper)
- 1 A samsvarar flutningi 1 C hleðslu á 1 sekúndu

6

## Grunnhugtök - Straumur

- Við notum táknið  $i(t)$  fyrir straum
- Samkvæmt skilgreiningunni hér að ofan er

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

og

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

7

## Grunnhugtök - Orka

- Orka.** Eitt af grundvallarlögmálum eðlisfræðinnar er lögmálið um varðveislu orkunnar.
- Orka myndast hvorki né eyðist, hún breytir aðeins um form.
- Raforka getur til dæmis orðið til úr efnaorku (rafhlaða) eða vélrænni orku (vatnsaflshverfill).
- Orka hefur eininguna J (Joule).
- Við notum táknið  $w(t)$  fyrir orku (vinnu).

8

## Grunnhugtök - Spenna

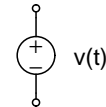
- **Spenna.** Ef vinna er framkvæmd á hleðslu, þá kallast hlutfall orkubreytingar og hleðslubreytingar, spenna
- Spenna hefur eininguna V (Volt).
- 1 V samsvarar 1 J vinnu framkvæmdri á 1 C hleðslu.
- Við notum táknið  $v(t)$  fyrir spennu.
- Samkvæmt skilgreiningu er

$$v(t) = \frac{dw(t)}{dq(t)}$$

9

## Rásaeiningar - Spennulindir

- **Óháð spennulind:** Óháð kjörspennulind er rásaeining sem viðheldur ákveðnum spennumun milli póla sinna, óháð straumnum sem fer um hana.

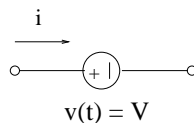
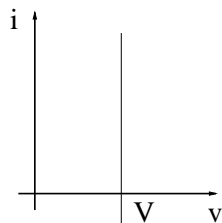


- Spennumunur er jákvæður reiknað frá mínuspól til plúspóls, þ.e. spennuhækkun.
- Ef spennan  $v(t)$  er jákvæð þá er spennan á plúspólnum hærrí en spennan á mínuspólum, sem nemur stærðinni  $v(t)$ .
- Þessi spennulind er kjörspennulind því að í raunveruleikanum getur jafnvel fullkomnasta spennulind ekki haldið ákveðinni spennu alveg óháð straumnum sem um hana fer.

10

## Rásaeiningar - Spennulindir

- Spennu-straums-kennilínan fyrir kjörspennulind

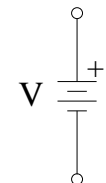


- Ef lindin er tengd við rás ákvarðast stærð og stefna straumsins  $i(t)$  af rásinni
- Spennulind með 0 V spennu heldur báðum pólum sínum við sömu spennu, óháð straumnum sem um hana fer. Hún er þá jafngild fullkomnum leiðara.

11

## Rásaeiningar - Spennulindir

- Ekki er hægt að tengja fullkominn leiðara milli póla spennulindar (nema 0 V). Þetta er kallað **skammhlaup**.
- Spennulindin tryggir spennumun milli pólanna en skammhlaupið tryggir sömu spennu, sem leiðir til mótsagnar.

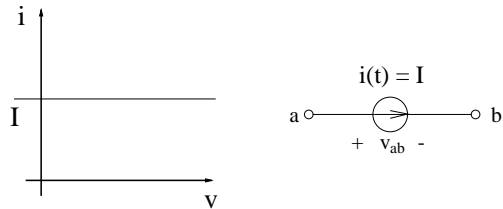


- Ef spenna lindar breytist ekki sem fall af tíma kallast hún **jafnspennulind**

12

## Rásaeiningar - Straumlindir

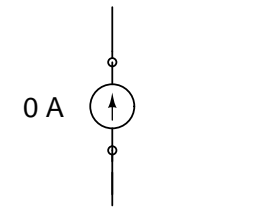
- **Óháð straumlind:** Óháð kjörstraumlind er rásaeining sem viðheldur ákveðnum straum í gegnum sig, óháð spennuninum milli póla hennar.
- Spennu-straums-kennilínan fyrir kjörstraumlind



- Ef straumlindin er tengd við rás þá ákvarðast stærð og stefna spennunnar  $v_{ab}$  af rásinni

13

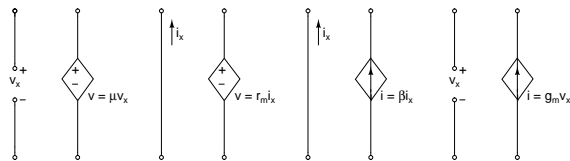
## Rásaeiningar - Straumlindir



- Straumlind með 0 A straum hleypir engum straum í gegnum sig, óháð spennunni yfir hana og er jafngild **ópinni rás**
- Straumlind getur aldrei verið ótengd, því eitthvert verður straumurinn að fara

14

## Rásaeiningar - Stýrðar lindir

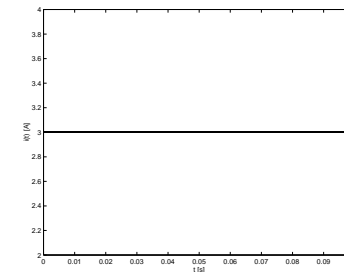


- **Stýrðar lindir.** Til eru fjórar tegundir stýrðra lindra, þ.e. lindir þar sem lindarspennan eða - straumurinn er háð einhverri breytu (spennu eða straum) annarsstaðar í rásinni. Þær eru
  - spennustýrð spennulind
  - straumstýrð spennulind
  - spennustýrð straumlind
  - straumstýrð straumlind

⇒ Dæmi 1.1.

15

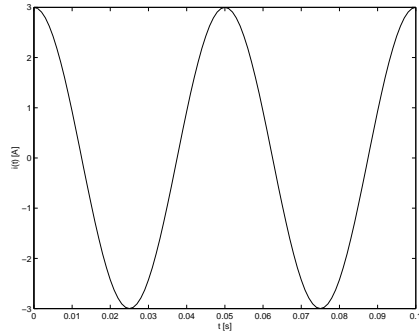
## Einingar og tákn



- Ef kraftur sem færir hleðslu um leiðara er fasti þá er straumurinn  $dq/dt = I$  fasti
- Slíkur straumur er nefndur **jafnstraumur**

16

## Einingar og tákn



- **Riðstraumur** er sínuslaga á forminu

$$i(t) = I_o \sin(\omega t + \phi)$$

17

## Einingar og tákn

**Riðstraumur** er sínuslaga á forminu

$$i(t) = I_o \sin(\omega t + \phi)$$

þar sem

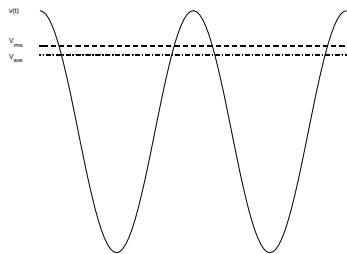
- $I_o$  er útslag merkisins
- $\omega$  er horn tíðni
- $t$  er tími
- $\phi$  er fasahorn

Venjulega notum við litla stafi til að tákna stærðir sem breytast með tíma ( $v, i, q$ ), en stóra stafi til að tákna fastar stærðir ( $V, I, Q$ )

$$v(t) = V_o \cos \omega t$$

18

## Einingar og tákn



**Virkt gildi** (rms) straumsins  $i(t)$  er

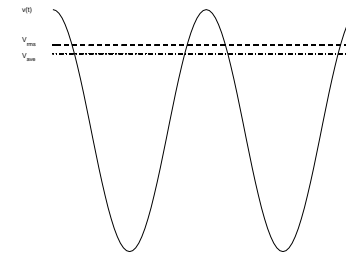
$$\text{rms gildi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \text{útslag} = 0.7071 \times I_o$$

eða

$$I_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{2}}{2} I_o$$

19

## Einingar og tákn



**Meðalgildi** straumsins er

$$I_{\text{ave}} = \frac{I_o}{T} \int_0^T |\sin(\omega\tau)| d\tau = \frac{2}{\pi} I_o$$

þar sem  $T$  er **lota merkisins**  $T = 2\pi/\omega$ .

20

## Riðstraumur og jafnstraumur í MATLAB:

```
%  
% Riðstraumur  
%  
t=0:0.001:0.1; fre = 2 * pi * 20; phi = 0.5 * pi; IO = 3;  
i = IO * sin(fre * t + phi);  
figure(1)  
plot(t,i)  
xlabel('t [s]');  
ylabel('i(t) [A]');  
print -deps 'rid.eps'  
%  
% Jafnstraumur  
%  
I = 3 * ones(length(t));  
figure(2)  
plot(t,I)  
xlabel('t [s]');  
ylabel('i(t) [A]');  
print -deps 'jafn.eps'
```

21

## Einingar og tákn

Einingakerfið sem notað er er SI-kerfið

- joule

$$1 \text{ J} = \text{Nm}$$

- watt

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

- volt

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

- ampere

$$1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}}$$

22

## Einingar og tákn

Einingakerfið sem notað er er SI-kerfið

- ohm

$$1 \Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

- farad

$$1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}}$$

- henry

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

23

## Eðlisviðnám

- Sá eiginleiki efnis að hindra straum sem um það fer er nefnd **eðlisviðnám** og táknud með  $\rho$ .
- Einangrarar hafa hátt eðlisviðnám
- Leiðarar hafa lágt eðlisviðnám

Efni	Eðlisviðnám [ $\Omega \text{ cm}$ ]
Kísill	$2.3 \times 10^5$
Kolefni	$4 \times 10^{-3}$
Ál	$2.7 \times 10^{-6}$
Kopar	$1.7 \times 10^{-6}$
Polystyrene	$1 \times 10^{18}$

24

## Eðlisviðnám

- **Viðnám** er eðliseiginleiki rásaeiningar eða tóls og er táknað með  $R$  þar sem

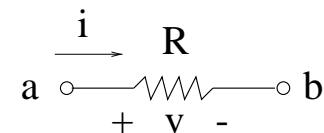
$$R = \frac{\rho L}{A}$$

og  $A$  er þverskurðarflatarmál,  $\rho$  er eðlisviðnám og  $L$  er lengd.

25

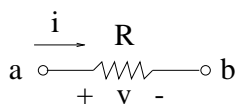
## Lögmál Ohms

- Fullkominn leiðari flytur hleðslu án þess að ytri orku þurfi til
- Hins vegar tekur viðnám orku frá sérhverri hleðslueiningu sem um það fer
- Ef straumur fer í gegnum viðnám hlýtur að vera spennunundur milli póla viðnámsins.



26

## Lögmál Ohms



- **Viðnám** er skilgreint sem sérhver sú rásaeining þar sem spennunundur milli póla er í réttu hlutfalli við strauminn sem á milli fer. Þetta má rita

$$v = iR$$

sem er nefnt lögmál Ohms

- Viðnám er táknað með  $R$ . Einingin fyrir viðnám er Ohm, táknað með

$$\Omega = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}}$$

⇒ Dæmi 1.2.

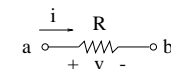
27

## Lögmál Ohms

- **Leiðni** er andhverfa viðnáms

$$G = \frac{1}{R}$$

og hefur eininguna S (Siemens) eða mho ( $\mathcal{U}$ ).

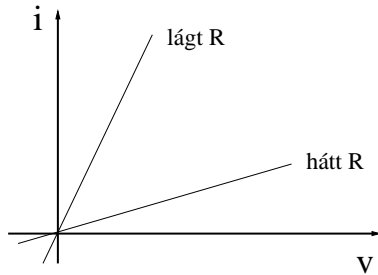


- Viðmiðunarstefnur: Spenna er skilgreind milli einhverra tveggja punkta með + og -
- Spennan er hærri þeim megin sem plúsinn er. Ef punktur a hefur hærri spennu en punktur b þá er  $v_{ab}$  jákvæð stærð
- Ef beita á lögmáli Ohms verða straumur og spenna alltaf að vera skilgreind með tengdar viðmiðunarstefnur.

28

## Lögmál Ohms

- Ef viðnám er fasti (eins og oftast) er kennilína þess bein lína í  $v - i$  plani, sem liggur í gegnum upphafspunktinn og hefur hallatölu  $1/R$
- Svona viðnám kallast **línulegt**



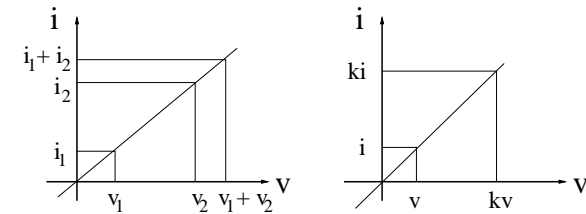
- Ef kennilínan liggur ekki í gegnum upphafspunktinn eða er ekki bein lína þá er viðnámið ekki línulegt

29

## Summun og einsleitni

Öll línuleg viðnám hafa tvo mikilvæga eiginleika:

- **Summun:** Ef straumur  $i_1$  veldur spennu  $v_1$  og straumur  $i_2$  veldur spennu  $v_2$ , þá veldur straumurinn  $i_1 + i_2$  spennunni  $v_1 + v_2$ , ef viðnámið er línulegt
- **Einsleitni:** Ef straumur  $i$  veldur spennu  $v$ , þá veldur straumurinn  $ki$  spennunni  $kv$ .



30

## fl

Ef bæði  $v > 0$  og  $i > 0$  þá tapa hleðslur orku við að fara í gegnum rásaeyninguna

- Spenna er skilgreind sem vinna á hleðslueiningu

$$v(t) = \frac{dw(t)}{dq(t)} \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V} \right]$$

- Straumur er skilgreindur sem hleðslutilfærsla á tímaeyningu

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad \left[ \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A} \right]$$

31

## fl

- Margfeldi straums og spennu er **afl**

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{dw(t)}{dq(t)} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dw(t)}{dt}$$

$$\left[ \text{V A} = \frac{\text{J C}}{\text{C s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} \right]$$

og  $p(t)$  er orka á tímaeyningu sem hver hleðslueining lætur í té til rásaeyningarinnar.

- Í viðnámi breytist þetta afl í varma sem geislar út í umhverfið

32



## Afl

- Ýmsar rásaeiningar geyma orkuna á einn eða annan hátt.
- Ef  $p = vi > 0$  tekur rásaeiningin til sín orku, ef  $p < 0$  lætur hún frá sér orku.
- Afl í viðnámi

$$p = vi = (iR)i = i^2R$$

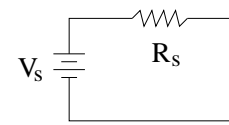
$$p = vi = v \frac{v}{R} = \frac{v^2}{R}$$

⇒ Dæmi 1.3.

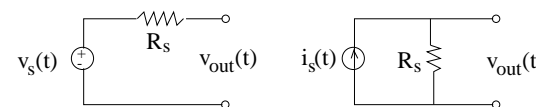
33

## Lindir - ekki fullkomnar

- Raunverulegar rafhlöður hafa innra viðnám. Af þessum sökum verður líkan af raunverulegri rafhlöðu að hafa slíkt viðnám raðtengt við fullkomna spennulind

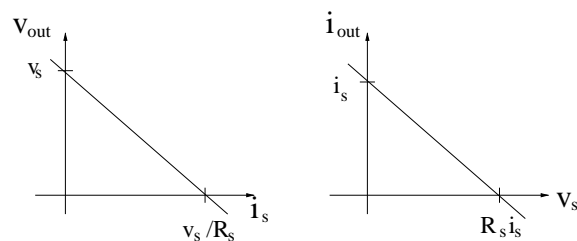


- Raunhæft líkan af spennulind og straumlind sem ekki eru fullkomnar má setja sem



34

## Lindir - ekki fullkomnar



Fyrir spennulind

$$v_{out} = v_s - i_s R_s$$

Fyrir straumlind

$$i_{out} = i_s - \frac{v_{out}}{R_s} = i_s - G_s v_{out}$$

35

## Frekara lesefni

Í kennslubók námskeiðsins (Nilsson and Riedel, 2007) er fyrsti kafli innangangur að rafmagnsverkfræði þar sem greining rása er skilgreind í tenglum við önnur svið. Þá er þar fjallað um SI einingakerfið og hugtökin spenna og straumur skilgreind. Í köflum 2.1. til 2.4 eru lindir og viðnám skilgreind sem og lögmál Ohms. Oft er gott að skoða aðrar bækur einnig og hér skal bent á að kaflar 1.1 og 1.2 í bók Scott (1987) fjalla um skilgreingar rásaeininga, lögmál Ohms og summun og einsleitni. Þá má einnig benda á kafla 1 í bók DeCarlo and Lin (2001) sem innangangur að rásagreiningu.

## References

- DeCarlo, R. A. and P.-M. Lin (2001). *Linear Circuit Analysis: Time Domain, Phasor and Laplace Transform Approaches* (2 ed.). New York: Oxford University Press.
- Nilsson, J. W. and S. A. Riedel (2007). *Electric Circuits* (8 ed.). Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall.
- Scott, D. E. (1987). *An Introduction to Circuit Analysis - A Systems Approach*. New York: McGraw-Hill.

36