Greining rása:

Merki

Kafli 6

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

6. vika 2008

Inngangur

- Hingað til hefur aðeins verið fjallað um jafnspennurásir, þ.e. rásir þar sem spennur og straumar eru fastar og breytast ekki með tíma.
- Þegar lindarspennur og -straumar breytast með tíma er þeim lýst með tímaföllum sem við köllum **merki**
- Algengasta fallið er sínusfallið. Veituspennan er sínuslaga, svo og öll radíómerki.

Einingarþrepfallið

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{ef} \quad t > 0 \\ 0 & \text{ef} \quad t < 0 \end{cases}$$

það er óskilgreint í $t = 0$

- Straumlind eða spennulind sem kveikt er á eða slökkt á við tímann $t = t_o$ má lýsa með einingarþrepfallinu
- Summu og margfeldi tveggja þrepfalla má nota til að lýsa stærðum sem “kviknar” á og “slokknar” á eða stærðum sem skipta á mill tveggja gilda

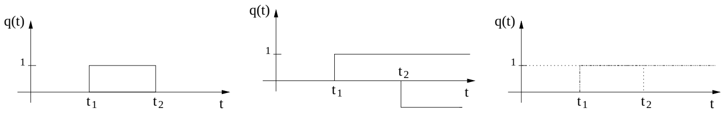
Einingarþrepfallið

- Þessu falli má t.d. lýsa sem summu tveggja þrepfalla

$$q(t) = u(t - t_1) - u(t - t_2)$$

eða sem margfeldi tveggja þrepfalla

$$q(t) = u(t - t_1)u(t_2 - t)$$



$\Longrightarrow$ Dæmi 6.1.

$\Longrightarrow$ Dæmi 6.2.

$\Longrightarrow$ Dæmi 6.3.

$\Longrightarrow$ Dæmi 6.4.

M TL B

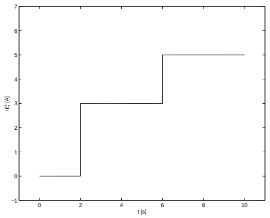
Í MATLAB er summa einingarþrepfalla

$$f(t) = 2u(t-6) + 3u(t-2)$$

teiknuð með

```
t=0:0.001:10; i1 = 2 * stepfun(t,6); i2 = 3 * stepfun(t,2); i3 = i1 + i2;
figure(1)
plot(t,i3); xlabel('t [s]'); ylabel('i(t) [A]'); axis([-1 11 -1 7]); print -deps 'step.eps'
```

sem gefur



Einingarimpúlsinn

- Skoðum púls (ferkanntaðan) með flatarmálið 1. Púlsinn $f_p(t)$ varir í Δ sekúndur og hefur hæðina $1/\Delta$.
- Látum nú $\Delta \longrightarrow 0$, og þá verður púlsinn mjórri og hærri.
- Markgildið er óendanlega hár og óendanlega mjór púls sem hefur flatarmálið 1. Þetta er **einingarimpúlsinn**

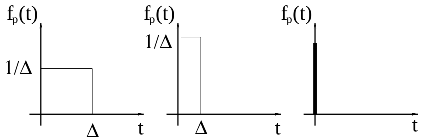
$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} f_p(t)$$

þar sem

$$f_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{ef} \quad 0 \le t \le \Delta \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- Við sjáum að impúlsfallið er allsstaðar núll nema þar sem frumbreyta þess er núll, þar er það óendanlega hátt.

Einingarimpúlsinn



Ef púlsinn var upphaflega K/Δ á hæð og Δ á breidd, þá er flatarmál hans $(K/\Delta)\Delta = K$ og skrifa má hann sem

$$f(t) = K f_p(t)$$

þá fæst

$$\lim_{\Delta \to 0} f(t) = \lim_{\Delta \to 0} K f_p(t) = K \lim_{\Delta \to 0} f_p(t) = K\delta(t)$$

þ.e. það að margfalda impúls með tölu (fasta) breytir aðeins flatarmáli hans, ekki hæð né breidd.

Einingarimpúlsinn

- Diffurkvóti einingarþrepfallsins er allsstaðar núll, nema við $t = 0$, þar er hann óendanlega hár, samanber impúls.
- Nálgum $u(t)$ með $\tilde{u}(t)$ svo

$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} \tilde{u}(t)$$

- Diffurkvóti $\tilde{u}(t)$ er einingarimpúlsinn

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t} = f_p(t)$$

en þegar $\Delta \longrightarrow 0$ verður

$$\lim_{\Delta \to 0} f_p(t) = \delta(t)$$

þ.e. einingarimpúlsinn er diffurkvóti einingarþrepfallsins.

Einingarimpúlsinn

- Impúlsinn er ekki fall í ströngustu merkingu. Spennulind sem gefur impúls, t.d. $v(t) = 10\delta(t)$ er heldur ekki til.
- En það er hægt að búa til nálgun á impúls, t.d. spennulind sem fer frá 0 til 1.000.000 V og aftur í 0 á um 1 μs, sem er nægilega góð nálgun í flestum tilfellum.
- Einingarflatarmálið kemur til vegna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = u(0^+) - u(0^-) = 1$$

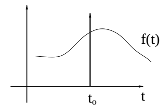
$\Longrightarrow$ Dæmi 6.5.

Einingarimpúlsinn

Almennt má finna

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_o)\mathrm{d}t$$

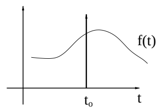
þ.e. tegrið af einhverju falli $f(t)$ margfölduðu með impúlsi við tímann t_o.



Þessi stærð er núll allsstaðar nema í $t = t_o$ (því $\delta(t - t_o)$ er núll nema í $t = t_o$). Því má skrifa tegrið sem

$$I = \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} f(t)\delta(t - t_o)\mathrm{d}t$$

Einingarimpúlsinn



Gerum síðan ráð fyrir að $f(t)$ breytist ekki yfir örstutt tímabilið $[t_{0-}, t_{0+}]$ og meðhöndlum fallið $f(t)$ sem fasta $f(t_o)$; og tökum út fyrir og fáum

$$I = f(t_o)\int_{t_{0-}}^{t_{0+}} \delta(t - t_o)\mathrm{d}t = f(t_o)$$

Því að tegrið af impúlsinum er 1.

Almennt er

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_o)\mathrm{d}t = f(t_o)$$

$\Longrightarrow$ Dæmi 6.6.

Einingarrampinn

Skoðum nú tegrið af einingarþrepfallinu

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau - t_o)\mathrm{d}\tau = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{ef} & t < t_o \\ t - t_o & \text{ef} & t > t_o \end{array} \right\}$$

eða

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau - t_o)\mathrm{d}\tau = (t - t_o)u(t - t_o)$$

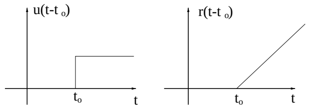
Skilgreinum **einingarampann** $r(t)$ sem

$$r(t) = tu(t)$$

eða

$$r(t - t_o) = (t - t_o)u(t - t_o)$$

Einingarrampinn



Almennt má rita

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau - t_o)\mathrm{d}\tau = r(t - t_o)$$

Hallatala einingarrampans er 1 fyrir $t > t_o$ og 0 fyrir $t \leq t_o$, þ.e.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(t - t_o) = u(t - t_o)$$

Við getum haldið áfram og skilgreint einingar-fleygboga, einingar-þriðjugráðufall o.s.frv.

Veldisfallið

Algengt merki er

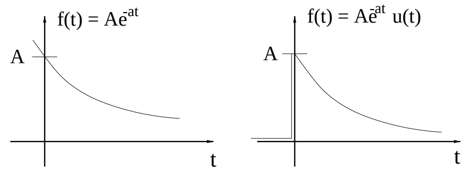
$$f(t) = A\mathrm{e}^{-at}$$

Við vitum að $\mathrm{e}^0 = 1$ svo að $f(0) = A\mathrm{e}^0 = A$.

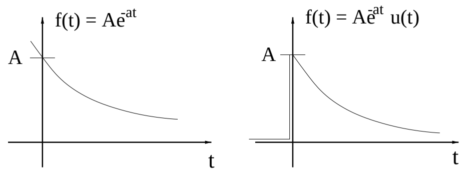
Fyrir $t < 0$ þá er $f(t) > A$.

Ef veldisfallið er margfaldað með einingarþrepi þá fæst fall sem er núll fyrir $t < 0$ en veldisfall fyrir $t > 0$, þ.e.

$$f(t) = A\mathrm{e}^{-at} u(t)$$



Veldisfallið



Tímastuðull veldisfallsins er skilgreindur með

$$\tau = \frac{1}{a}$$

og við $t = \tau$ fæst

$$f(\tau) = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}\tau} = A\frac{1}{\mathrm{e}}$$

Veldisfallið

Diffurkvóti veldisfallsins er aftur veldisfall

$$f(t) = A\mathrm{e}^{-at}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -aA\mathrm{e}^{-at}$$

Ef veldisfallið er margfaldað með einingarþrepfalli og diffrað þá fæst

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = A\left(\mathrm{e}^{-at}\delta(t) - a\mathrm{e}^{-at}u(t)\right)$$

eða

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = A\left(\delta(t) - a\mathrm{e}^{-at}u(t)\right)$$

$\Longrightarrow$ Dæmi 6.7.

Sínusfallið

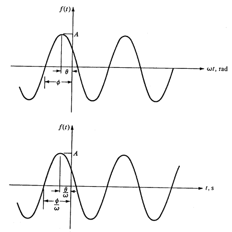
- Algengasta fallið er sínusfallið
- Við notum sínus og cosínus jöfnum höndum
- Dæmi um slíkt fall er

$$f(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

þar sem A, ω og θ eru fastar

  - A er útslag merkisins
  - ω er horntíðni
  - t er tími
  - θ er fasahorn

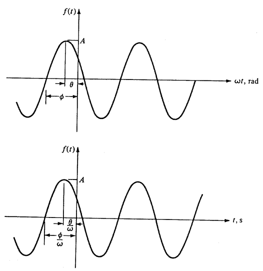
Sínusfallið



- **Lotan** T er sá tími sem það tekur frumbreytu fallsins að fara frá 0 til 2π, þ.e. ef við tímann t_1 gildir $\omega t_1 + \theta = 0$ þá er $t_1 = -\theta/\omega$ og við tímann t_2 gildir $\omega t_2 + \theta = 2\pi$ þá er $t_2 = 2\pi - \theta/\omega$, þá er lota skilgreind sem

$$T = t_2 - t_1 = \frac{2\pi - \theta}{\omega} + \frac{\theta}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Sinusfallið



$$f(t) = A\cos(\omega t + \theta) = A\sin(\omega t + \phi)$$

og

$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2}$$

Fallið endurtekur sig á 2π radiana fresti eða á T sekúndna fresti

Sinusfallið

Því gildir

$$f(t) = f(t + nT) \qquad n \in \mathcal{Z}$$

eða

$$\begin{aligned} f(t+nT) &= A\cos(\omega(t+nT)+\theta) \\ &= A\cos(\omega t + \omega nT) + \theta) \\ &= A\cos(\omega t + \omega n\frac{2\pi}{\omega} + \theta) \\ &= A\cos(\omega t + \theta + 2n\pi) \\ &= A\cos(\omega t + \theta) = f(t) \end{aligned}$$

Sínusfallið

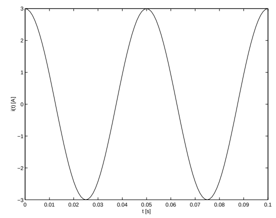
- Tímabilið T ákvarðar eina sveiflu af bylgjunni og einingin er sekúndur per sveiflu
- Andhverfa stærðin hefur eininguna sveiflur á sekúndu eða rið [Hz, Hertz] og kallast **tíðni** f, þ.e.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

eða

$$\omega = 2\pi f$$

Sinusfallið



Sagt er að sinusfallið sé $\pi/2$ rad (90°) á eftir cosinusfallinu og að cosinusfallið sé $\pi/2$ rad (90°) á undan sínusfallinu

$$\cos\omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Frekara lesefni

Um einingarþrepfallið og rampafallið er fjallað í kafla 3 hjá Scott (1987) og í kafla 13.4 hjá DeCarlo and Lin (2001).

References

DeCarlo, R. A. and P.-M. Lin (2001). *Linear Circuit Analysis: Time Domain, Phasor and Laplace Transform Approaches* (2 ed.). New York: Oxford University Press.

Scott, D. E. (1987). *An Introduction to Circuit Analysis - A Systems Approach.* New York: McGraw-Hill.