

Greining rása:

Orkugeymandi rásaeiningar

Kaffi 7

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

7. vika 2008

1

Inngangur

- Geymsla orku í rásaeiningum er mikilvægur og notadrjúgur eiginleiki í rásum
- Í þessum kafla eru innleiddar rásaeiningarnar **þéttar** og **spólur**, sem kallaðar eru **orkugeymandi rásaeiningar**
- Rásaeiningar eru eðlisfræðilegt fyrirbæri sem skilgreinir sambandið milli straumsins í gegnum eininguna og spennunnar yfir hana

2

Línulegt samband

Samband milli tveggja breyta x og y er **línulegt** ef það uppfyllir tvö skilyrði

- Ef $y = g(x)$ þá er $g(ax) = ay$, a er fasti
- Ef $y_1 = g(x_1)$ og $y_2 = g(x_2)$ þá er $g(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$

Línuleg rásaeining er sérhver sú rásaeining þar sem **straumur og spenna tengjast með línlegum hætti**

3

Tegrun

Tegrun

$$y = g(x) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

þar sem

$$g(ax) = \int_{-\infty}^t ax(\tau) d\tau = a \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = ag(x) = ay$$

og

$$\begin{aligned} g(x_1 + x_2) &= \int_{-\infty}^t (x_1(\tau) + x_2(\tau)) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \\ &= g(x_1) + g(x_2) = y_1 + y_2 \end{aligned}$$

er línuleg aðgerð

4

Diffrun

Diffrun

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = g(t)$$

þar sem

$$g(ax) = \frac{d(ax(t))}{dt} = a \frac{d(x(t))}{dt} = ag(x) = ay$$

og

$$\begin{aligned} g(x_1 + x_2) &= \frac{d(x_1(t) + x_2(t))}{dt} \\ &= \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_2(t)}{dt} \\ &= g(x_1) + g(x_2) = y_1 + y_2 \end{aligned}$$

er línuleg aðgerð

5

f

- Afl sem línuleg rásaeyning fær frá umhverfi sínu er

$$p(t) = v(t)i(t)$$

- Ef $p(t) < 0$ þá er rásaeyningin að láta frá sér afl og ef $p(t) > 0$ er rásaeyningin að taka til sín afl

- Samkvæmt skilgreiningu er

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt}$$

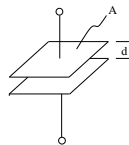
- Orkan sem rásaeyning fær frá umhverfi sínu er

$$w(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt$$

6

Þéttir

- Þéttir er tveggja póla rásaeyning sem samanstendur af tveim leiðandi plötum og einangrandi efni á milli



- Fyrir þétti er samband straums og spennu er gefið með jöfnunni

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

þar sem stuðullinn C kallast **rýmd** þéttisins og hefur eininguna farad [F] eða

$$1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}$$

7

Þéttir

- Með því að tegra báðar hliðar jöfnunnar frá $t = -\infty$ til einhvers tímapunkts t_0 fæst

$$v(t_0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(t)dt$$

- Tegrið $\int_{-\infty}^{t_0} i(t)dt$ er nettóhleðslan q sem safnast hefur fyrir í þéttinum við tímann t_0 af völdum straumsins sem streymt hefur inn í þéttinn frá $t = -\infty$ til $t = t_0$, þ.e.

$$q(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} i(t)dt$$

- Þá er

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{fyrir öll } t$$

8

Þéttir

- Þá má rita

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

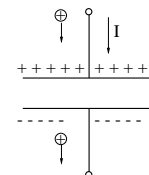
- Þéttir er línuleg rásaeining, sambandið milli spennu og hleðslu er línulegt og straumurinn finnst með því að diffra hleðsluna, sem er línuleg aðgerð
- Þéttir er rásaeining sem geymir hleðslu; því meiri hleðslu sem hann geymir, þeim mun hærri spenna mælist yfir hann

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{fyrir öll } t$$

9

Þéttir

- Þéttir er gerður úr tveim leiðandi plötum með einangrandi (rafsvara) efni á milli
- Þegar fastur straumur I streymir “um” þétti þá safnast jákvæðar hleðslur jafnt og þétt á plötuna þar sem straumurinn streymir inn



- Jákvæðar hleðslur flæða út úr þéttinum hinumegin svo að heildar hleðslan á þeirri plötu verður neikvæð. Þar sem straumur út er jafn stór og straumur inn þá er jafn stór hleðsla á báðum plötunum, $q(t)$, aðeins með mismunandi formerki.

10

Þéttir

- Milli jákvæðu hleðslanna á annarri plötunni og neikvæðu hleðslanna á hinnari plötunni ríkir aðdráttarkraftur, þ.e. þéttirinn geymir orku.
- Þessa orku má finna sem tegrið af affinu sem þéttirinn hefur fengið frá umhverfi sínu, við einhvern tíma $t = t_0$

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} p(t) dt = \int_{-\infty}^{t_0} v(t) i(t) dt$$

Notum að $i(t) = dq/dt$

$$w(t_0) = \int_{q(-\infty)}^{q(t_0)} v(t) dt = \int_{v(-\infty)}^{v(t_0)} C v(t) dv$$

11

Þéttir

- Þegar $v(-\infty) = 0$ fæst

$$w(t_0) = \frac{1}{2} C v^2(t_0)$$

eða almennt gildir fyrir orku

$$w(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

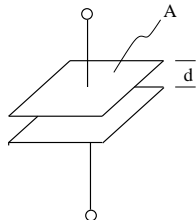
- Þar með er aflið

$$p(t) = C v(t) \frac{dv}{dt} = v(t) i(t)$$

12

Þéttir

- Gerum nú ráð fyrir plötubétti sem samanstendur af plötum með flatarmál A og aðskilnað d



- Ef plöturnar hafa hleðslu Q þá er **yfirborðshleðsluþéttleiki**

$$\rho_s = \frac{Q}{A}$$

13

Þéttir

- **Rafsviðsstyrkur** E milli plátanna er einsleitur og af styrk

$$E = \frac{\rho_s}{\epsilon}$$

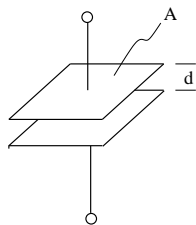
með $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ þar sem ϵ_0 er **rafsvörunarstuðull lofttæmis** og ϵ_r er **hlutfallslegur rafsvörunarstuðull** efnisins milli plátanna

- Hlutfallslegur rafsvörunarstuðull

Efni	$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$
Gler	7
Nylon	2
Bakelite	5

14

Þéttir



- Spennan yfir þéttinn er þá

$$v = \int_1^2 \mathbf{E} ds = Ed$$

og rýmdin

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{\epsilon A}{d}$$

15

Þéttir

Tveir mikilvægir eiginleikar þéttis

- Ef spenna yfir þétti er sínuslaga

$$v_C(t) = V \sin(\omega t)$$

þá verður straumurinn

$$i_C(t) = C\omega V \cos(\omega t)$$

þ.e. í beinu hlutfalli við tíðnina

há tíðni \rightarrow hár straumur

lág tíðni \rightarrow lítill straumur

- Ef tíðnin er mjög há má setja skammhlaup í stað þéttisins og ef hún er núll (dc) má setja opna rás í stað þéttis

16

Þéttir

- Til að spennan $v_C(t)$ yfir þéttinn geti breyst ósamfelld verður straumurinn $i_C(t)$ að vera óendanlega hár, þ.e. impúls
- Því má segja að ef engir impúlsar eru til staðar þá verður spennan yfir þéttinn alltaf samfelld, þ.e. engin spennuþrep eru möguleg (nema impúlsar komi til)

⇒ Dæmi 7.1.

17

Þéttir

- Spenna yfir sérhvern þétti við $t > 0$ ræðst af tvennu:
 - Hvaða straumur hefur flætt inn í þéttinn síðan $t = 0$
 - Hvaða spenna var yfir þéttinn við $t = 0$
- Þetta má skrifa sem

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

- Fyrri tegrið er nettóhleðslan sem safnast hefur í þéttinum á tímabilinu $-\infty < t < 0$. Þegar deilt er með rýmd þéttisins C þá fæst spennan yfir þéttinn við tímann $t = 0$.

18

Þéttir

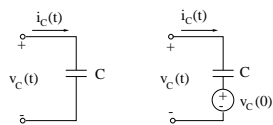
- Þess vegna er

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

eða

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) u(\tau) d\tau$$

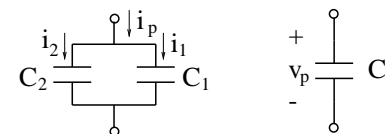
sem segir að í stað þéttis sem hefur upphafsgildi við $t = 0$ má setja jafnstóran þétti sem er óhlaðinn við $t = 0$ og raðtengda spennulind með spennu $v_C(0)$.



⇒ Dæmi 7.2.

19

Þéttir



Ef tveir þéttar C_1 og C_2 eru hliðtengdir má setja í stað þeirra einn jafngildisþétti C_p .

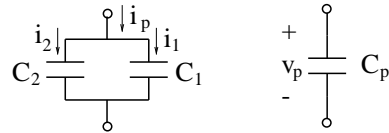
$$i_p = C_p \frac{dV_p}{dt}$$

eða

$$i_p = i_1 + i_2 = C_1 \frac{dV_1}{dt} + C_2 \frac{dV_2}{dt}$$

20

Þéttir



Þar sem $V_p = V_1 = V_2$ þá er

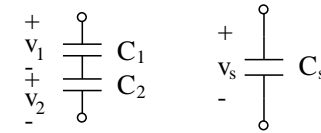
$$i_p = (C_1 + C_2) \frac{dV_p}{dt}$$

eða

$$C_p = C_1 + C_2$$

21

Þéttir



Ef tveir þéttar C_1 og C_2 eru raðtengdir má setja í stað þeirra einn jafngildisþétti C_s

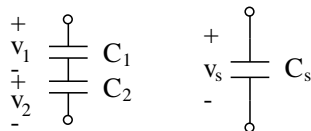
$$v_s(t) = \frac{1}{C_s} \int_{-\infty}^t i_s(\tau) d\tau$$

eða þar eð $v_s = v_1(t) + v_2(t)$ þá er

$$v_s(t) = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i_1(\tau) d\tau + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i_2(\tau) d\tau$$

22

Þéttir



Nú er $i_s = i_1 = i_2$ svo að

$$v_s(t) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int_{-\infty}^t i_s(\tau) d\tau$$

eða

$$C_s = \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right)$$

23

Spóla

- Vír má vinda upp og mynda spólu
- Línuleg spóla er rásaeining þar sem samband straums og spennu er gefið með jöfnunni

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

- Stuðullinn L kallast **span** spólunnar og hefur eininguna henry [H]
- Með því að tegra báðar hliðar jöfnunnar frá $t = -\infty$ til einhvers tímapunkts t_0 fæst

$$i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(t) dt$$

þ.e. straumurinn í spólunni ræðst af því hvernig spennan yfir hana hefur verið frá upphafi

24

Spóla

Við getum séð að spólan er orkugeymandi rásaeining með því að finna heildarorkuna sem hún hefur þegið frá umhverfi sínu:

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} p(t) dt = \int_{-\infty}^{t_0} v(t)i(t) dt$$

eða

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} L \frac{di(t)}{dt} i(t) dt = L \int_{i(-\infty)}^{i(t_0)} i(t) di$$

Með $i(-\infty) = 0$ fæst

$$w(t_0) = L \frac{i^2(t_0)}{2}$$

25

Spóla

Almennt gildir fyrir orkuna

$$w(t) = \frac{1}{2} Li^2(t)$$

Þar með er aflið

$$p(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} = i(t)v(t)$$

26

Spóla

Lítum á tvo mikilvæga eiginleika spólu:

- Ef straumurinn í spólunni er sínuslaga

$$i_L(t) = I \sin(\omega t)$$

þá verður spennan

$$v_L(t) = L\omega I \cos(\omega t)$$

þ.e. í beinu hlutfalli við tíðnina

há tíðni \rightarrow há spenna

lág tíðni \rightarrow lág spenna

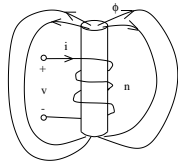
27

Spóla

- Ef tíðnin er mjög há má setja opna rás í stað spólunnar og ef hún er núll (dc) má setja skammhlaup í stað spólunnar
- Ef engir spennuimpúlsar eru til staðar þá er straumurinn í spólunni samfelldur, þ.e. enginn straumþrep eru möguleg (nema impúls komi til)

28

Spóla



- Dæmigerð spóla er undin úr viðnámslausum vír með n vindingum. Ef straumur i fer um spóluna þá myndast segulsvið $\phi(t)$ sem hefur lokaðar segulsviðslínur.

- Spennan yfir spóluna er tímaafleiðan af segulflæðinu $n\phi$,

$$v(t) = \frac{d}{dt}(n\phi) = n \frac{d(\phi)}{dt}$$

- Jákvæð spenna þýðir að segulsviðið sé að vaxa; neikvæð spenna þýðir að það fari minnkandi.

29

Spóla

Stærðin á segulflæðinu ϕ ræðst af straumnum $i(t)$. Sé spólan línuleg gildir

$$\phi(t) = \frac{L}{n} i(t)$$

Leysum fyrir strauminn

$$i(t) = \frac{1}{L} n\phi = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

eða

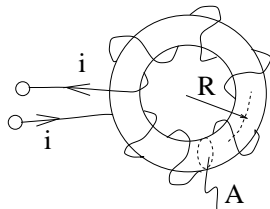
$$n\phi = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

sem þýðir að segulsviðið ræðst af því hver spennan hefur verið frá upphafi.

30

Spóla

Span hvernar spólu ræðst af stærð hennar og lögun



Fyrir hjólaslóngulaga spólu með n vindinga gildir

$$L = \frac{\mu_r \mu_0 n^2 A}{2\pi R}$$

þar sem μ_0 er **segulsvörunarstuðull lofttæmis**, μ_r er **hlutfallslegur segul- svörunarstuðull** efnis spólukjarna, A er þverskurðarflatarmál spólukjarnans og R er radíi spólunnar.

31

Spóla

- Almennt gildir að spanið er í réttu hlutfalli við vindingafjöldann í öðru veldi og í réttu hlutfalli við þverskurðarflatarmálið, en í öfugu hlutfalli við lengd leiðarinnar sem segulflæðið fer, l .

- Með

$$L = \frac{\mu n^2 A}{l}$$

fæst

$$\phi = \mathcal{P}ni$$

þar sem

$$\mathcal{P} = \frac{\mu A}{l}$$

kallast **segulleiðni** leiðarinnar sem segulflæðið fer.

32

Spóla

- Jafnan hér að ofan er því nokkurs konar Ohm lögmál fyrir segulrásir, þar sem segulflæðið ϕ samsvarar straum, ampervindingarnir ni (mmf, segulíspenna) samsvara spennu og **segultregðan** $\mathcal{R} = 1/\mathcal{P}$ samsvarar viðnámi
- Ef efnið sem segulflæðið fer um er loft eða lofttæmi (kjarnalaus spóla) þá er \mathcal{R} fasti og sambandið milli ϕ og ni línulegt
- Sé kjarninn úr járni eða öðru ferrómagnetísku efni þá er μ (og þar með \mathcal{R}) fall af ϕ svo að sambandið milli ϕ og ni verður ólínulegt
- Jafnan $v = Ldi/dt$ gildir þá ekki

33

Spóla

- Hvort sem spólan er línuleg eða ekki þá gildir

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} v(t)i(t)dt$$

og

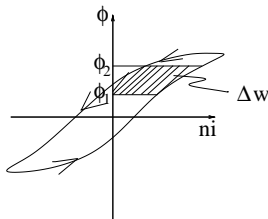
$$v(t) = \frac{d(n\phi)}{dt}$$

eða

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \frac{d(n\phi)}{dt} i(t)dt = \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(t_0)} ni(t)d\phi$$

34

Spóla



- Orkan sem bætist við geymda orku í spólunni þegar flæðið vex frá ϕ_1 til ϕ_2 er jöfn flatarmálinu Δw
- Sum ferrómagnetísk efni hafa mismunandi $\phi(ni)$ ferla eftir því hvort ni er vaxandi (spóla tekur til sín orku) eða minnkandi (spóla lætur frá sér orku)
- Þetta fyrirbæri kallast **segulheldni**

35

Spóla

- Sé straumurinn sínuslaga þá er öll segulheldnilykkjan farin í hverri lotu
- Flatarmálið innan lykkjunnar gefur til kynna orkutapið í spólunni í hverri lotu. Sú orka umbreytist í varmaorku.

⇒ Dæmi 7.3.

36

Spóla

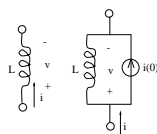
- Fyrir $t > 0$ gildir að straumur í spólu er

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$$

eða

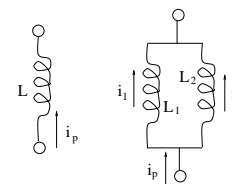
$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$$

- Í stað spólu með upphafsstraum (við $t = 0$) má því setja spólu án upphafsstraums og hliðtengja straumlind $i(0)$ og reikna síðan strauma og spennur fyrir $t > 0$ út frá þessum gildum



37

Spóla



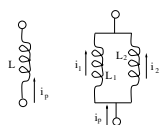
- Ef tvær spólur L_1 of L_2 eru hliðtengdar má setja í stað þeirra eina jafngildisspólu L_p

$$i_1 = \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t v_1(\tau) d\tau$$

$$i_2 = \frac{1}{L_2} \int_{-\infty}^t v_2(\tau) d\tau$$

38

Spóla



og

$$i_p = i_1 + i_2$$

$$v_1 = v_2 = v_p$$

svo

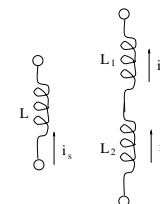
$$i_p = i_1 + i_2 = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \int_{-\infty}^t v_p(\tau) d\tau = \frac{1}{L_p} \int_{-\infty}^t v_p(\tau) d\tau$$

eða

$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

39

Spóla



Ef tvær spólur L_1 og L_2 eru raðtengdar má setja í stað þeirra eina jafngildisspólu L_s

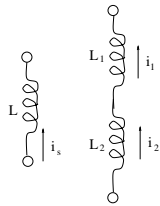
$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \text{og} \quad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

en

$$i_1 = i_2 = i_s$$

40

Spóla



Þar með er

$$v_s = v_1 + v_2 = (L_1 + L_2) \frac{di_s}{dt} = L_s \frac{di_s}{dt}$$

eða

$$L_s = L_1 + L_2$$

⇒ Dæmi 7.4.

⇒ Dæmi 7.5.

Frekara lesefni

Um þetta er fjallað í kafla 6.2 og spólur í kafla 6.1 í kennslubókinni (Nilsson and Riedel, 2007) og um rað- og hliðtengingu er fjallað í kafla 6.3. Svipaða umræðu er að finna hjá DeCarlo and Lin (2001) í kafla 7.

References

DeCarlo, R. A. and P.-M. Lin (2001). *Linear Circuit Analysis: Time Domain, Phasor and Laplace Transform Approaches* (2 ed.). New York: Oxford University Press.

Nilsson, J. W. and S. A. Riedel (2007). *Electric Circuits* (8 ed.). Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall.