Kjarna- og öreindafræði:

Víxlverkun geislunar við þéttefni

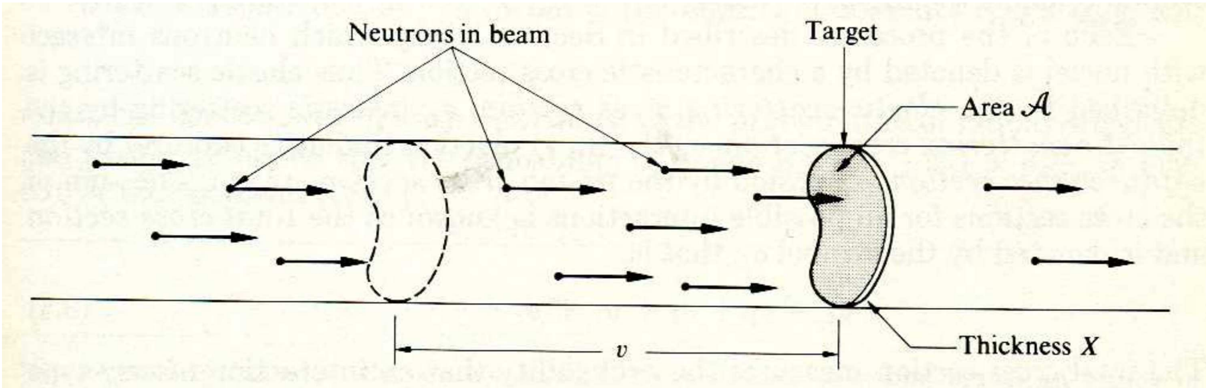
Kafli 2

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

2. vika haust 2015

Líkindaþversnið



Frá Lamarsh (1983)

- Gerum ráð fyrir geisla einlitra nifteinda sem lendir á þunnu skotmarki sem hefur þykktina x og yfirborðsflarmál A
- Ef geislinn samanstendur af n nifteindum per cm^3 og v er hraði nifteindanna þá er stærðin

$$I = nv$$

nefnd þéttni geislans

Líkindaþversnið

- Þá er fjöldi árekstra á sekúndu

$$\sigma I N A x$$

þar sem σ er hlutfallsfasti sem nefndur er **líkindaþversnið** (e. cross section)

$$\sigma_{\mathrm{t}} = \sigma_{\mathrm{s}} + \sigma_{\mathrm{i}} + \sigma_{\gamma} + \sigma_{\mathrm{f}} + \ldots$$

- Líkindaþversnið nifteinda eru gefin í einingunni *barns*, þar sem 1 barn, skammstafað b, er 10^{-24} cm^2

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.1.

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.2.

Deyfing nifteindageisla

- Látum $I(x)$ vera styrk nifteinda sem hafa ekki lent í árekstri eftir að hafa farið vegalengdina x um skotmark
- Þá ef nifteindirnar fara viðbótarvegalengd dx, fellur strykur geislans sem nemur þeim nifteindum sem verða fyrir árekstrum á þessari örsmæð eða
$$-dI(x) = N\sigma_{\mathrm{t}} I(x)dx = \Sigma_{\mathrm{t}} I(x)dx$$
- Þessi jafna er tegruð til að gefa styrk nifteinda sem fara um skotmark án árekstra
$$I(x) = I_0 \exp\left(-\Sigma_{\mathrm{t}} x\right)$$
- Þegar í $dI(x)$ er deilt með $I(x)$ fæst
$$-\frac{dI(x)}{I(x)} = \Sigma_{\mathrm{t}} dx$$

Deyfing nifteindageisla

- Þar sem $dI(x)$ er fjöldi nifteinda af fjöldanum $I(x)$ sem verða fyrir árekstri í dx, þá sést að $dI(x)/I(x)$ eru líkur þess að nifteind sem lifir til x víxleverki á næstu dx
- Þar sem Σ_{t} eru líkurnar á víxlverkun á lengdareiningu þegar nifteind fer um efni þá er $p(x)dx$ líkur á að nifteind lifir til x án árekstrar hafi árekstur á næstu dx eða

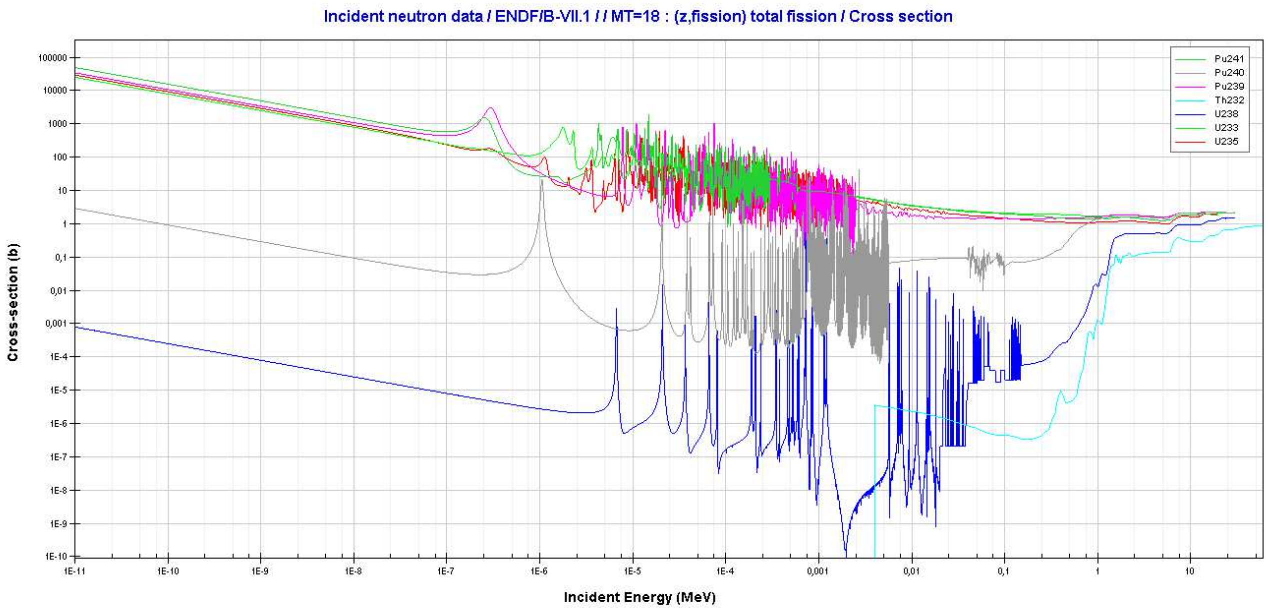
$$p(x)dx = \exp\left(-\Sigma_{\mathrm{t}} x\right) \Sigma_{\mathrm{t}} dx = \Sigma_{\mathrm{t}} \exp\left(-\Sigma_{\mathrm{t}} x\right) dx$$

og meðal fjarlægð sem nifteind ferðast á milli árekstra er þá **meðalsnertan** (e. mean free path) rituð sem

$$\lambda = \int_0^\infty x p(x) dx = \Sigma_{\mathrm{t}} \int_0^\infty x \exp\left(-\Sigma_{\mathrm{t}} x\right) dx = \frac{1}{\Sigma_{\mathrm{t}}}$$

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.3.

Líkindaþversnið nifteinda



- Líkindaþversnið nifteinda er háð orku innkomandi nifteinda og kjörnum skotmarksins

Líkindaþversnið nifteinda

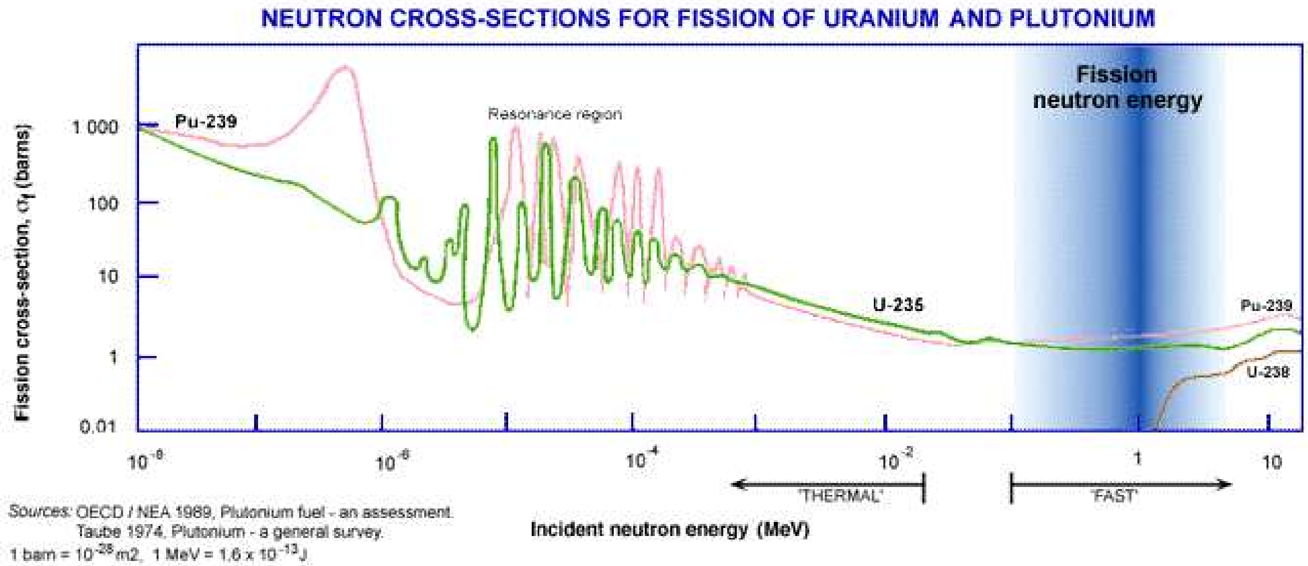
- Ferli víxverkunar nifteinda við kjarna eru
  - Fjaðrandi árekstur
    * σ_{s} er nánast fasti við lága orku en við hærri orku kemur fram herma
  - Ófjaðrandi árekstur
    * σ_{i} er núll upp að tiltekinni þröskuldsorku
  - Hremming
    * Við lága orku

$$\sigma_\gamma \sim \frac{1}{\sqrt{E}} \sim \frac{1}{v}$$

    * Við hærri orku notum við Breit-Wigner jöfnuna

$$\sigma_\gamma = \frac{\lambda_{\mathrm{r}}^2 g}{4\pi} \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E - E_{\mathrm{r}})^2 + \Gamma^2/4}$$

Líkindaþversnið nifteinda

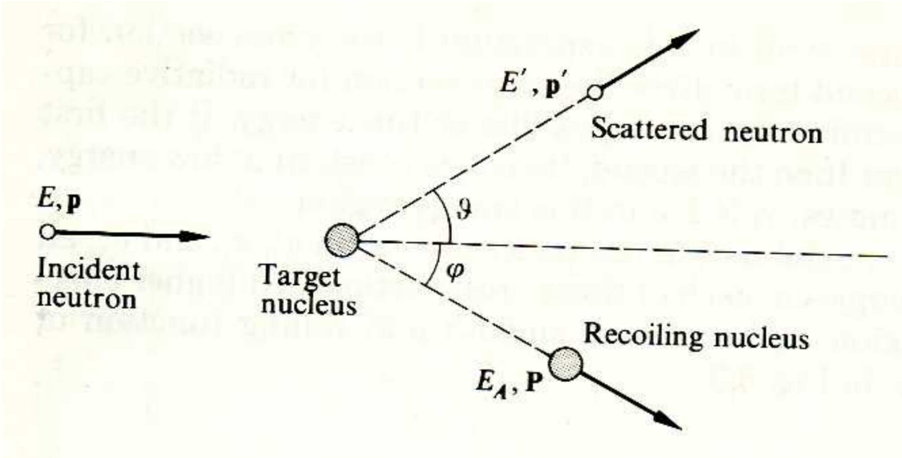


$\Longrightarrow$ Dæmi 2.4.

Orkutap við tvístrun

- Þegar nifteind verður fyrir fjaðrandi tvístrun frá kjarna í hvíld, þá verður kjarninn fyrir bakslagi
- Hreyfiorka tvístruðu nifteindarinnar er þess vegna lægri en innkomandi nifteindarinnar sem nemur orkunni sem fer í bakslag kjarnans
- Orkutapið má finna með því að skoða varðveislu orku og skriðþuga

Orkutap við tvístrun

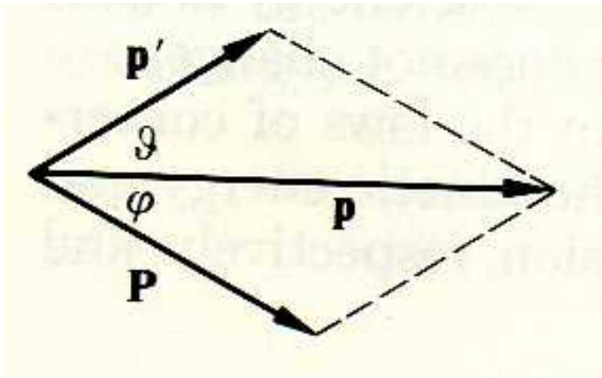


Frá Lamarsh (1983)

- Setjum E, $\mathbf{p}$, og E', $\mathbf{p}'$, sem hreyfiorku og skriðþunga nifteindar fyrir og eftir árekstur, og E_A og $\mathbf{P}$ er orka og skriðþungi bakslags kjarnans
- Ef áreksturinn er fjaðrandi

$$E = E' + E_\mathrm{A}$$

Orkutap við tvístrun



Frá Lamarsh (1983)

- Varðveisla skriðþunga er þá

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{P}$$

- Þá er

$$P^2 = p^2 + (p')^2 - 2pp' \cos \vartheta$$

Orkutap við tvístrun

- Sígild aflfræði segir

$$P^2 = 2ME_{\mathrm{A}}$$

og

$$p^2 = 2mE$$

og

$$p'^2 = 2mE'$$

þar sem m er massi nifteindar og M er massi kjarnans

Orkutap við tvístrun

- Þar með er

$$ME_{\mathrm{A}} = mE + mE' - 2m\sqrt{EE'}\cos\vartheta$$

- Þar sem M/m er um það bil massatalan A þá er

$$AE_{\mathrm{A}} = E + E' - 2\sqrt{EE'}\cos\vartheta$$

- Innleiðum E_{A} svo að

$$(A+1)E' - 2\sqrt{EE'}\cos\vartheta - (A-1)e = 0$$

sem er annarar gráðu jafna í $\sqrt{E'}$ sem hefur lausn

$$E' = \frac{E}{(A+1)^2}\left[\cos\vartheta + \sqrt{A^2 - \sin^2\vartheta}\right]$$

Orkutap við tvístrun

- Fyrir tilfellið þegar $\vartheta = \pi$ þá er nifteindinni tvístrað afturábak og tapar við það mestri mögulegri orku

$$(E')_{\min} = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E = \alpha E$$

þar sem

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$$

er **árekstrarstuðull**

- Tvístrun nifteinda með vetni er einstök vegna þess að massi agnanna er nánast sá sami

- Það er auðvelt að sýna að ögn sem að rekst á aðra ögn af sama massa getur ekki tvístrast meira en sem nemur 90°

Orkutap við tvístrun

- Minnsta orka nifteinda sem verður fyrir tvístrun með vetni er þá fundin með því að setja $\vartheta = \pi/2$ sem gefur

$$(E')_{\text{min}} = 0$$

- Reyndar gildir

$$(E')_{\text{min}} = \alpha E$$

fyrir alla kjarna að vetni meðtöldu

- Meðalokra fjaðrandi tvístraðrar nifteindar er nálguð með

$$\overline{E'} = \frac{1}{2}(1+\alpha)E$$

Orkutap við tvístrun

- Meðal orkutapið er þá

$$\overline{\Delta E} = E - \overline{E'} = \frac{1}{2}(1-\alpha)E$$

og meðal hlutfallslegt orkutap

$$\frac{\overline{\Delta E}}{E} = \frac{1}{2}(1-\alpha)$$

þessi jafna er gild fyrir þyngri kjarna en ekki háorku nifteindir

- Stundum er árekstri nifteindar lýst með stærðinni höfgi (e. lethargy) sem er skilgreind

$$u = \ln(E_{\rm M}/E)$$

þar sem $E_{\rm M}$ er einhver tiltekin orka, oft hæsta orka nifteindar í kerfinu

Orkutap við tvístrun

- Jafnan segir okkur að fyrir háorku nifteind er höfginn lítill og þegar hún hægir á sér og E fellur eykst höfgin
- Meðaltal breytingar í höfga $\overline{\Delta u}$ er gefin táknið ξ og rituð

$$\xi = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \ln\left(\frac{A+1}{A-1}\right)$$

þar sem A er massatala kjarna skotmarksins

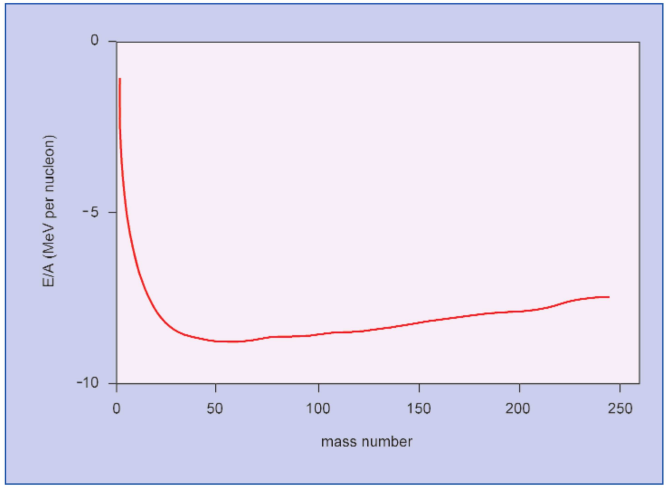
- Það má nálga ξ með

$$\xi \approx \frac{2}{A + 2/3}$$

sem gildir nema fyrir smæstu gildi á A

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.5.

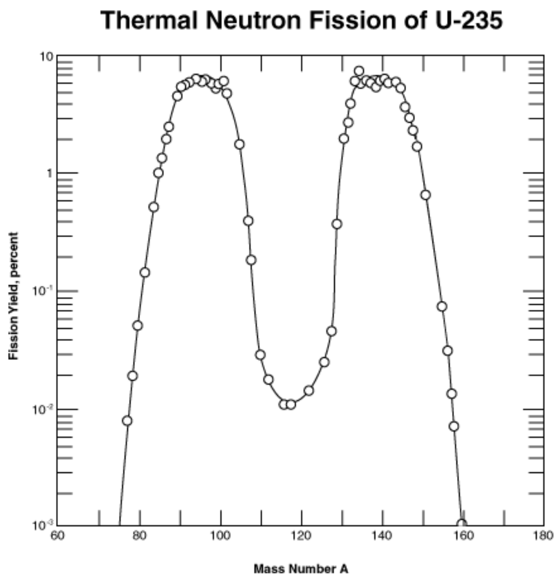
Sundrun



Frá Mackintosh et al. (2001)

- Við höfum séð að bindiorka á hverja kjarneind fellur með stækkandi massatölu frumeindar, fyrir A sem er staærra en 50
- Þetta þýðir að stöðugri kjarni kemur fram þegar þungur kjarni sundrast í tvo hluta

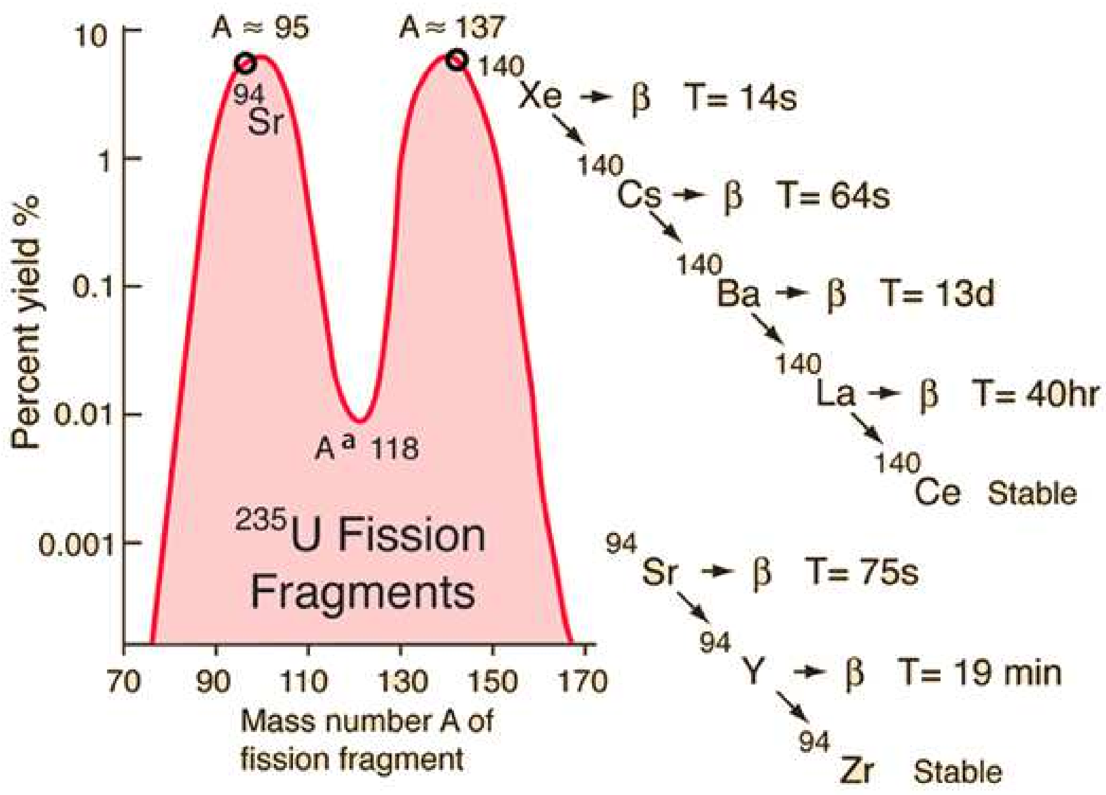
Sundrun



Frá `http://www.science.uwaterloo.ca/ cchieh/cact/nuctek/fissionyield.html`

- Sundrun er nánast alltaf ósamhverf og massar kjarnanna sem koma fram eru mjög misjafnir
- Þetta sét á myndinni sem sýnir fission product yield

Sundrun



10
1
0.1
0.01
0.001
Percent yield %
A ≈ 95
A ≈ 137
94 Sr
A a 118
235U Fission Fragments
70
90
110
130
150
170
Mass number A of fission fragment
140 Xe → β T= 14s
140 Cs → β T= 64s
140 Ba → β T= 13d
140 La → β T= 40hr
140 Ce Stable
94 Sr → β T= 75s
94 Y → β T= 19 min
94 Zr Stable

Sundrun

- Þegar sundrun á sér stað eru myndefnin yfirleitt nifteindarík, það er þær innihalda fleiri nifteindir en þörf er á fyrir stöðugleika þeirra
- Niðurastaðan er sú að þeir hrörna með því að geisla frá sér β^--agnir og $\gamma-$geisla
- Til dæmis er samsætan ^{115}Pd mynduð við sundrun og hrörnar samkvæmt

$$^{115}\mathrm{Pd} \xrightarrow{\beta^-} {}^{115}\mathrm{Ag} \xrightarrow{\beta^-} {}^{115}\mathrm{Cd} \xrightarrow{\beta^-} {}^{115}\mathrm{In}$$

- Margar slíkar hrörnunarkeðjur eru þekktar

Sundrun

- Til að kjarnaklofnun verði nægilega snögg til að vera nothæf í kjarnasundrunarofnum er nauðsynlegt að fæða nægilega orku til kjarneinda kjarnans
- Orkan sem þarf er nefnd krítisk orka kjarnaklofnunar
- Þegar bindiorkan er hærri en krítísk orka kjarnaklofnunar, þá getur kjarnaklofnun átt sér stað með nifteindum sem hafa nánast enga hreyfiorku
- Kjarni eins og ^{235}U, þar sem kjarnaklofnun á sér stað eftir að hafa gleypt núll orku nifteind er kallaður **kleyfur** (e. fissile)

Sundrun

- Fyrir flesta þunga kjarna, ef undan eru skyldir ^{233}U, ^{235}U, ^{239}Pu, og ^{241}Pu, þá er bindi orka innkomandi nifteindar ekki nægjanleg til að veita kjarnanum krítiska orku, og nifteindin verður að hafa einhverja hreyfiorku til að koma kjarnaklofnun af stað
- Sér í lagi á þetta við þegar kjarnin hefur jafna tölu sem fjölda kjarneinda
- Bindiorka innkomandi nifteindar er alltaf lægri fyrir jafnt A heldur en fyrir odda A
- Kjarni eins og ^{238}U sem fer ekki í gegnum kjarnaklofnun nema ef orkurík nifteind rekist á hann er sagður vera kjarnkleyfur en ekki kleyft (e. fissionable but nonfissile)

Sundrun

- Þegar nifteind rekst á við kjarnkleyfan kjarna er niðurstaðan ekki alltaf klofnun
- Nitfeindirnar verða fyrir tvístrun eða eru gleptar
- Vegna þess að $\sigma_{\mathrm{s}} > \sigma_{\gamma}$ eða σ_{f} þá er hlutfallið milli gleypni og sundrunar táknað með
$$\alpha = \frac{\sigma_{\gamma}}{\sigma_{\mathrm{f}}}$$

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.6.

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.7.

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.8.

Sundrun

- Skilgreinum η sem er jafn fjölda nifteinda sem losna við klofnun fyrir hverja nifteind sem er gleypt af kjarnkleyfum kjarna
- Meðalfjöldi nifteinda bæði prompt og tafðar er táknaður með ν
- Þar sem gleyping er í samkeppni við klofnun, þá er η alltaf minna en ν

$$\eta = \nu \frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{\sigma_{\mathrm{a}}} = \frac{\nu \sigma_{\mathrm{f}}}{\sigma_{\mathrm{f}} + \sigma_{\gamma}}$$

eða

$$\eta = \frac{\nu}{1 + \alpha}$$

- Fyrir blöndu er

$$\eta = \frac{1}{\Sigma_{\mathrm{a}}} \sum_i \nu_i \Sigma_{\mathrm{f},i}$$

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.9.

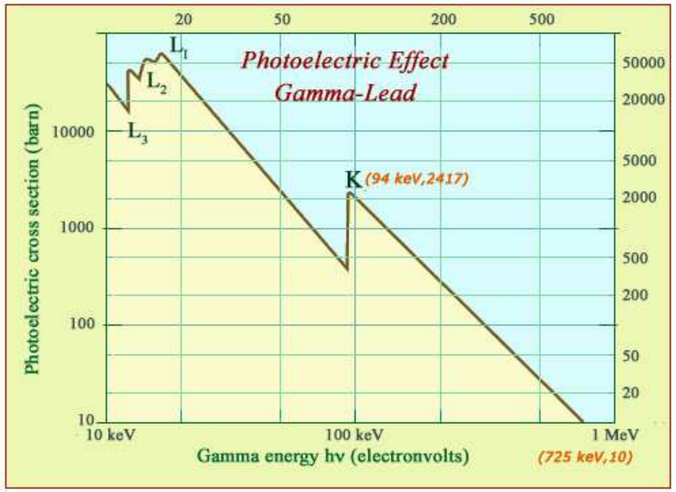
Víxlverkun γ-geisla við þéttefni

- γ-geislar víxlverka við þéttefni á nokkra vegu
  - **Ljósröfun** (e. photoelectric effect)
  - **Tvenndarmyndun** (e. pair production)
  - Tvístrun ljóseinda með rafeindum – Thomson, Rayleigh og Compton hrif

Víxlverkun γ-geisla við þéttefni – Ljósröfun

- Við ljósröfun víxlverkar γ-geislinn við alla frumeindina
- γ-geislinn hverfur og einni rafeind frumefnisins er geislað út
- Frumeindin verður fyrir bakslagi en fær mjög litla hreyfiorku við ferlið
- Það þýðir að hreyfiorka útgeisluðu rafeindarinnar er nánast hin sama og orka ljóseeindarinnar, nema hvað nemur bindiorku rafeindarinnar, eða jónunarorku rafeindarinnar
- Eyðan í rafeindum er brátt fyllt með ytri rafeindum og út er geislað Röntgengeisla

Víxlverkun γ-geisla við þéttefni – Ljósröfun



- Líkindaþversniðið fyrir þetta ferli er bæði háð orku innkomandi ljóseindar og frumeindatölunni Z
- Við sjáum að það koma fram ósamfellur í líkindaþversniðinu við lága orku – nefndar **ísogsbrúnir** (e. absorption edges)

Víxlverkun γ-geisla við þéttefni – Ljósröfun

- Líkindaþversniðið er mjög háð Z eða

$$\sigma_{\text{pe}} \sim Z^n$$

  þar sem n er fall af orkunni E

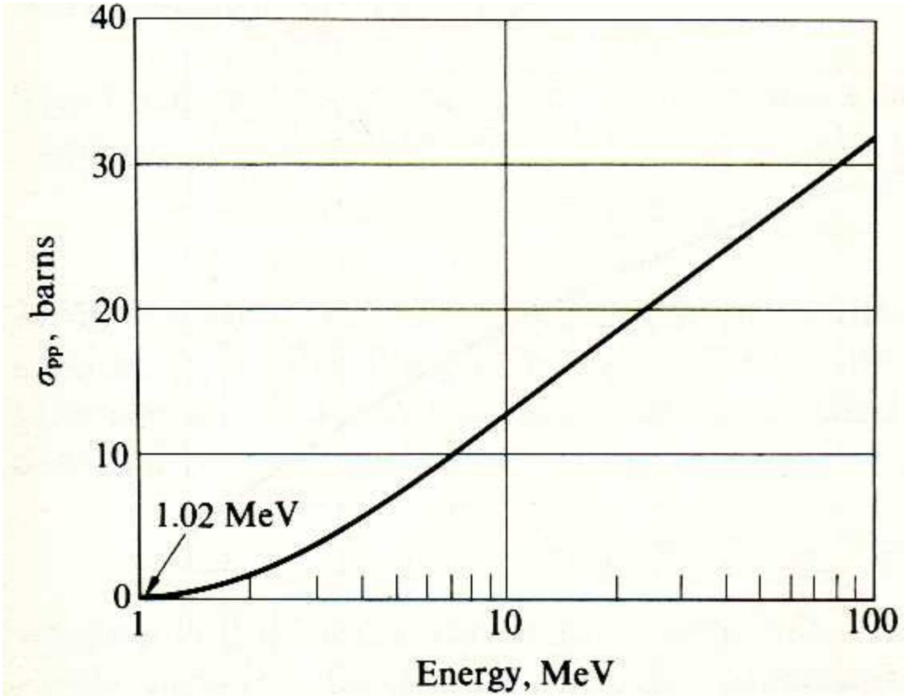
- Vegna þess hve mjög líkindaþversniðið er háð Z ljósröfun er mikilvæg fyrir þyngri frumeindir eins og blý

Víxlverkun γ-geisla við þéttefni – Tvenndarmyndun

- Tvenndarmyndur er það þegar ljóseindin hverfur og fram kemur rafeindapar - jáeind og rafeind
- Þar sem hvíldarmassi tveggja rafeinda er $2m_\mathrm{e}c^2 = 1.02$ MeV, þá gerist þetta ekki nema að ljóseindin hafi í það minnsta þessa orku
- Ofan við þennan þröskuld eykst líkindaþversniðið með aukinni orku
- Líkindaþversniðið er fall af Z eða

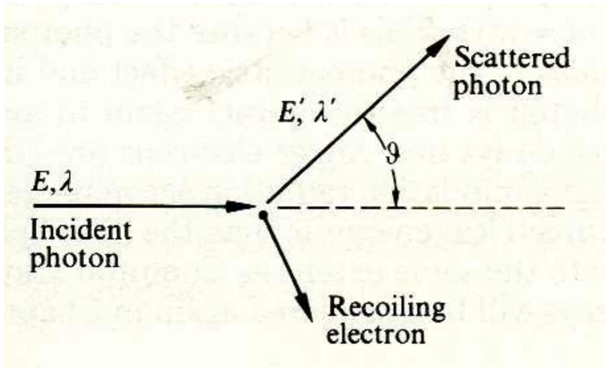
$$\sigma_\mathrm{pp} \sim Z^2$$

Víxlverkun γ-geisla við þéttefni – Tvenndarmyndun



Frá Lamarsh (1983)

Víxlverkun γ-geisla við þéttefni – Compton hrif



Frá Lamarsh (1983)

- Compton hrif eru einfaldlega fjaðrandi tvístrun ljóseindar með rafeind, þar sem hvoru tveggja orka og skriðþungi eru varðveitt
- Eins og sést á myndinni er innkomandi ljóseind með orku E og bylgjulengd λ tvístrað um hornið ϑ og rafeindin verður fyrir bakslagi

Víxlverkun γ-geisla við þéttefni – Compton hrif

- Með því að setja upp jöfnur fyrir varðveislu orkunnar og skriðþunga fæst

$$E' = \frac{E E_{\mathrm{e}}}{E(1-\cos\vartheta) + E_{\mathrm{e}}}$$

þar sem $E_{\mathrm{e}} = m_{\mathrm{e}} c^2 = 0.511$ MeV er hvíldarmassi rafeindarinnar

- Jafngilt er

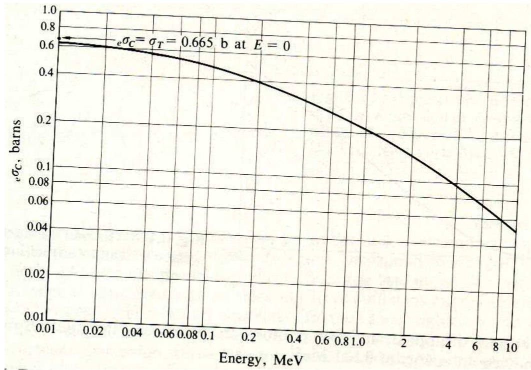
$$\lambda' - \lambda = \lambda_{\mathrm{C}}(1-\cos\vartheta)$$

þar sem

$$\lambda_{\mathrm{C}} = \frac{h}{m_{\mathrm{e}} c} = 2.426 \times 10^{-10}\ \ \mathrm{cm}$$

er bylgjulengd Compton

Víxlverkun γ-geisla við þéttefni – Compton hrif



Frá Lamarsh (1983)

- Í Compton tvístrun víxlverkar ljóseindin við einstakar rafeindir og því má skoða líkindaþversnið fyrir hverja rafeind ${}_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{C}}$
- Þetta líkindaþversnið fellur með aukinni orku frá hæsta gildi 0.665 barn við $E = 0$, sem er þekkt sem líkindaþversnið Thompson, σ_{T}
- Þar með er

$$\sigma_{\mathrm{C}} = Z_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{C}}$$

Víxlverkun γ-geisla við þéttefni – Deyfing

- Heildar líkindaþversnið er summan

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{pe}} + \sigma_{\mathrm{pp}} + \sigma_{\mathrm{C}}$$

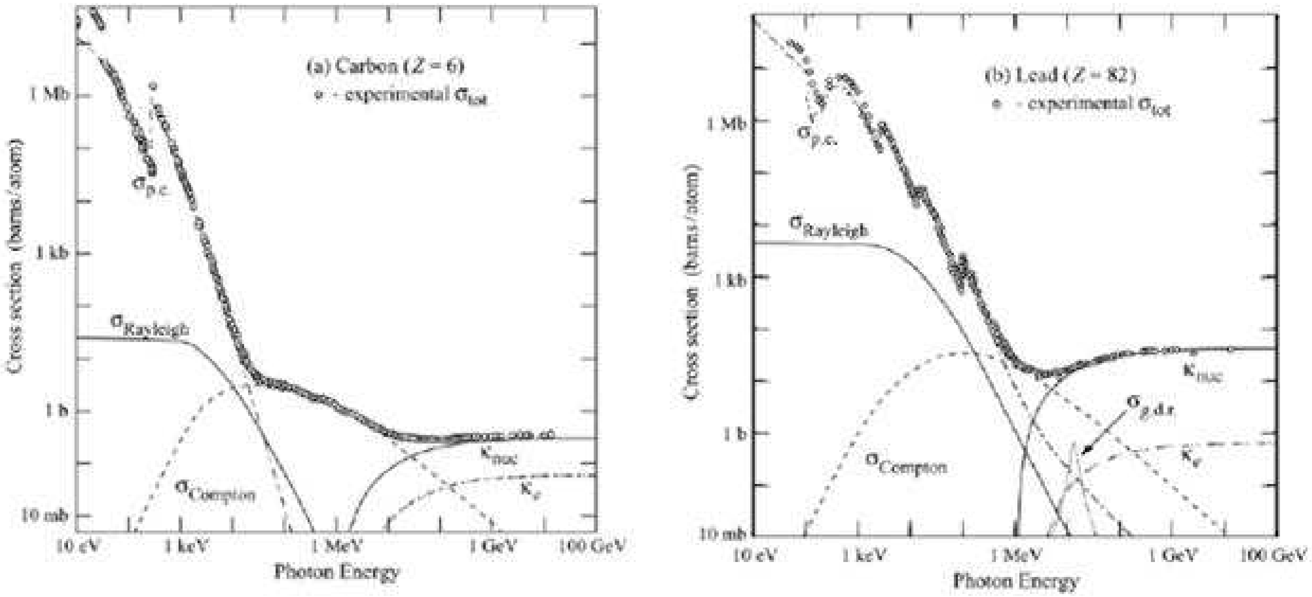
og deyfistuðullinn er fundinn með því að margfalda líkindaþversniðið með frumeindaþéttleikanum N

$$\mu = N\sigma = \mu_{\mathrm{pe}} + \mu_{\mathrm{pp}} + \mu_{\mathrm{C}}$$

og einnig er skilgreindur massadeyfistuðull μ/ρ þannig að

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu_{\mathrm{pe}}}{\rho} + \frac{\mu_{\mathrm{pp}}}{\rho} + \frac{\mu_{\mathrm{C}}}{\rho}$$

Víxlverkun γ-geisla við þéttefni – Deyfing



Víxlverkun α-agna við þéttefni

- Þar sem α-agnir eru tiltölulega þungar, víkja þær ekki mikið af braut sinn er þær víxlverka við rafeindir á frumeindum
- Þær ferðast því í nærri beinum línum innan efnis
- Þegar α-ögn hægir á sér aukast líkur á að hún gleyði rafeind og myndi He^+ jón og gleypi svo aðra jón og myndi He frumeind
- Þar sem jónunin fellur í núll er nefnt **skotlengd** (e. range) α-agnarinnar
- Skotlengd α-agna er fundin út frá skotlengd í andrúmslofti með því að nota reglu Bragg-Kleeman

$$R = R_{\mathrm{a}} \left(\frac{\rho_{\mathrm{a}}}{\rho} \right) \sqrt{\frac{M}{M_{\mathrm{a}}}} = 3.2 \times 10^{-4} \frac{\sqrt{M}}{\rho} R_{\mathrm{a}}$$

Víxlverkun α-agna við þéttefni

- Hér er R er skotlengd í efni sem hefur eðlismassa ρ og frumeindamassa M og $R_{\rm a}$, $\rho_{\rm a}$ og $M_{\rm a}$ eru skotlengd, eðlismassi og frumeindamassi fyrir andrúmsloft
- Hlutfallsleg skotlengd í efni er þá

$$\frac{R_{\rm a}}{R} = 3100 \frac{\rho}{\sqrt{M}}$$

- Fyrir 5 MeV $\alpha-$ögn í áli er skotlengdin 0.0022 cm
- Þetta þýðir að α-agnir eru stoppaðar með þunnum pappír

Víxlverkun β-geisla við þéttefni

- Deyfing β-geisla í þéttefni er aðeins flóknari en deyfing α-agna
- β-geislar hafa samfellt orkuróf
- β-geislar ferðast eftir flóknum zigzag brautum um þéttefni
- Einföld nálgun er fundin út frá mælingum á áli

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{17}{E_{\rm max}^{1.14}}$$

þar sem μ/ρ er í cm^2/g og $E_{\rm max}$ er mesta orka β-geislanna í MeV

Víxlverkun β-geisla við þéttefni

- Önnur mikilvæg stærð er mesta fjarlægð R_{max} sem β-agnir ferðast um þéttefni
- Þessi stærð skilgreinir þykkt efnis sem þörf er á til að stöðva rafeindir
- Þessi stærð er gefin sem

$$R_{\mathrm{max}}\rho = 0.412 E_{\mathrm{max}}^{(1.265-0.0954 \ln E_{\mathrm{max}})}, \qquad E_{\mathrm{max}} < 2.5 \text{ MeV}$$

og

$$R_{\mathrm{max}}\rho = 0.530 E_{\mathrm{max}} - 0.106, \qquad E_{\mathrm{max}} > 2.5 \text{ MeV}$$

þar sem $R_{\mathrm{max}}\rho$ er í g/cm^2

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.10.

Frekari upplýsingar

- Þessi kafli er að mestu byggður á kafla 3 hjá Lamarsh (1983). Ítarlega umfjöllun má finna í kafla 2 hjá Segré (1977).

Heimildir

Lamarsh, J. R. (1983). *Introduction to Nuclear Engineering* (2 ed.). Reading, Massachusets: Addison Wesley.

Mackintosh, R., J. Al-Khalili, B. Jonson, and T. Pena (2001). *Nucleus: A Trip Into the Heart of Matter*. Baltimore, Maryland: The Johns Hopkins University Press.

Segré, E. (1977). *Nuclei and Particles* (2 ed.). Redwood City, California: Addison-Wesley.