

Kjarna- og öreindafræði:

Kjarna líkön

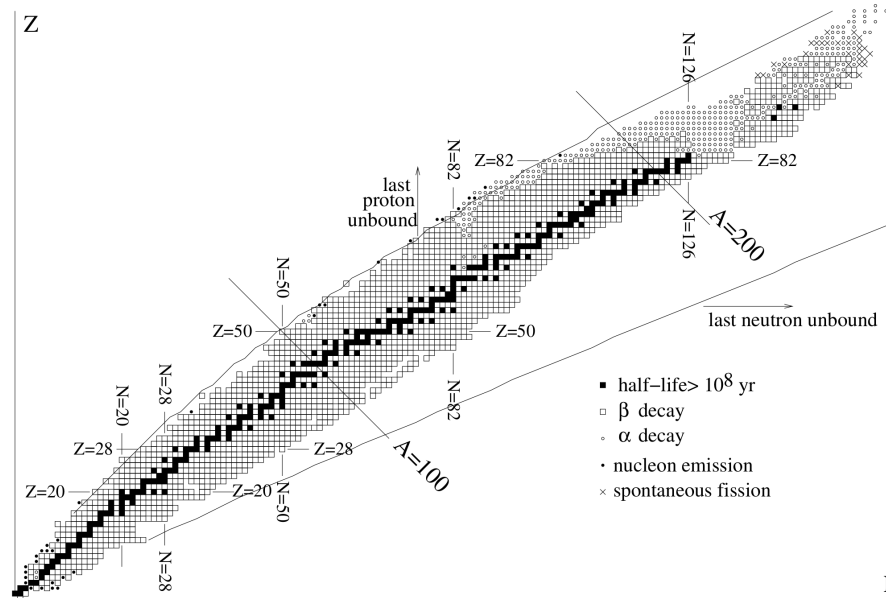
Kafli 3

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

3. vika haust 2015

Stöðugleiki



Frá Basdevant et al. (2005)

- Við munum nú skoða hvers vegna sumar samsetningar af N nifteindum og Z róteindum mynda bundin ástönd
- Þekktar samsetningar af N og Z eru sýndar á myndinni

Stöðugleiki

- Við sjáum að flestar þekktar samsetningar innihalda of mikið af nifteindum eða of mikið af róteindum
- Þessar samsetningar eru β -óstöðugar
- Margir þungir kjarnar hrörna með α -geislun og aðrir sundrast í léttari frumefni

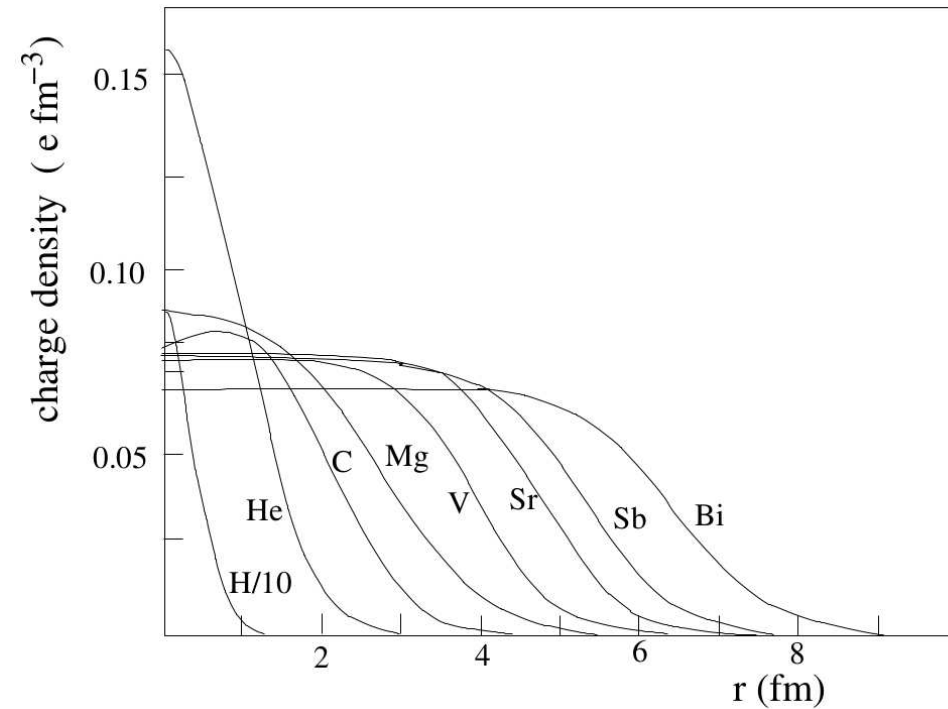
Meðalmættislíkanið

- Það má læra ýmislegt um kjarnann með því að gera ráð fyrir að innan kjarnans ferðist einstakar kjarneindir í mættisbrunni sem er skilgreindur af meðal víxlverkuninni milli allra kjarneinda
- Meðalmættislíkanið byggir á því að í góðri nálgun má sjá að einstakar kjarneindir hegða sér eins og óháðar agnir í meðalmætti (eða meðal sviði) sem stafar frá hinum kjarneindunum
- Við ritum þetta meðalmætti sem summu mættis $v(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ milli kjarneindar við \mathbf{r} og kjarneindar við \mathbf{r}' þannig að

$$V(\mathbf{r}) = \int v(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$$

þar sem þéttleiki kjarnans $\rho(\mathbf{r}')$ er í réttu hlutfalli við það að finna kjarnann í nágrenni við \mathbf{r}' á rúmmálseiningu

Meðalmættislíkanið



Frá Basdevant et al. (2005)

- Það er þetta fall sem er sýnt á myndinni hér að ofan fyrir róteindir

Meðalmættislíkanið

- Hin sterka víxlverkun kjarneinda $v(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ er aðdráttarkraftur og er mjög skammsær
- Hann fellur skarpt niður í núll fyrir vegalengdir sem eru umfram ~ 2 fm, á meðan að dæmigerður radíi kjarna er miklu stærri eða um það bil 6 fm fyrir léttu kjarna eins og súrefni og 14 fyrir blý
- Til að einfalda framsetninguna getum við nálgast mættið v með delta falli

$$v(r - r') \sim v_0 \delta(r - r')$$

- Fastann v_0 má líta á sem frjálsa stærð

Meðalmættislíkanið

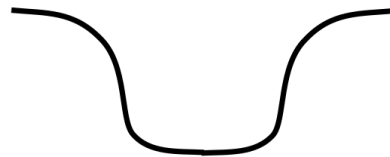
- Meðalmættið er þá

$$V(r) = -v_0\rho(r)$$

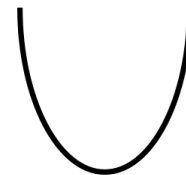
- Ef $\rho \sim 0.15 \text{ fm}^{-3}$ þá sjáum við að mættisbrunnurinn er nálega

$$V(r < R) \sim -30 \text{ MeV}$$

djúpur, þar sem R er radíi kjarnans



(a)



(b)

Frá Basdevant et al. (2005)

- Hleðslupéttleikinn að ofan bendir til að mættið líti út eins og á mynd (a)

Meðalmættislíkanið

- Oft er notað Saxon-Woods mættið

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \exp(r - R)/R}$$

þar sem V_0 er dýpt mættisins, 30 – 60 MeV og R er radíi kjarnans

$$R \sim 1.2A^{1/3} \text{ fm}$$

- Það má líka nota einfaldara mætti sem leiðir til svipaðrar niðurstöðu – mætti hreintóna sveifils eins og sást á mynd (b)

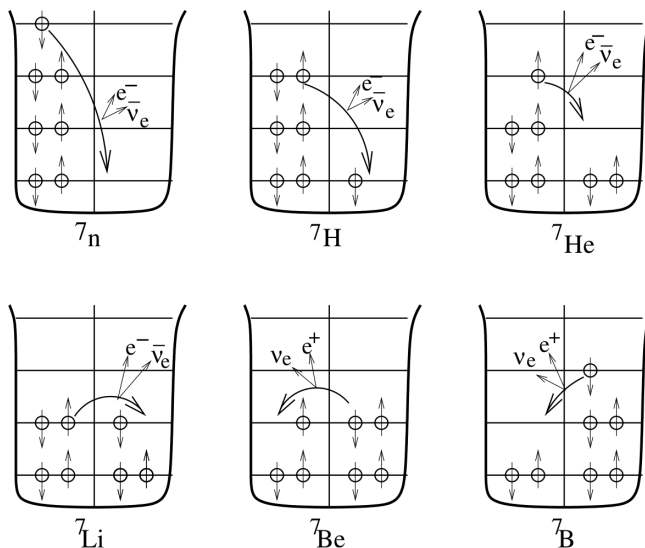
$$V(r) = -V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = -V_0 + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2, \quad r < R$$

þar sem $V_0 = \frac{1}{2}M\omega^2 R^2$, og $V(r > R) = 0$

Meðalmættislíkanið

- Lægra liggjandi bylgjuföll þessara tveggja mættisbrunna (a) og (b) eru mjög svipuð sem og nokkur fyrstu orkuástöndin
- Í þessu líkani þar sem kjarneindir geta ferðast óháðar frá hverri annari, og róteindir og nifteindir uppfylla reglu Pauli, má finna orkustig og röðun (e. configuration) á svipaðan hátt og gert er fyrir flóknar frumeindir í Hartree nálguninni
- Eins og fyrir rafeindir á slíkum frumeindum, eru brautir róteinda og nifteinda óháðar fermieindabrautir
- Það er áhugavert að líta á stöðugleika ólíkar $A = 7$ kjarna í ljósi meðalmættis
- Vegna Pauli reglunnar verður í kjarnanum með fleiri nifteindir en róteindir og öfugt, að setja kjarneindir á hærri orkustig

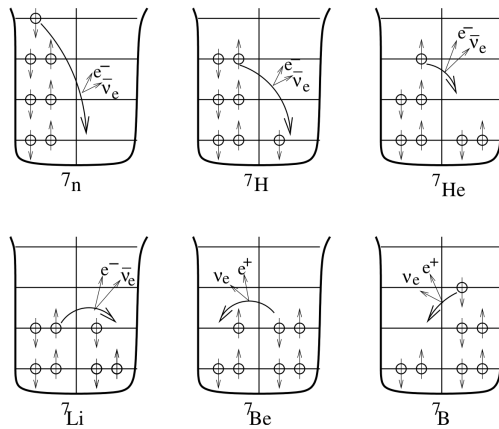
Meðalmættislíkanið



Frá Basdevant et al. (2005)

- Þetta þýðir að lægstu orkustigin hafa jafnmargar róteindir og nifteindir, ${}^7_{Li}$ og ${}^7_{Be}$
- Við væntum þess að aðrar raðanir hrörni með β -hrörnun í annan þessara kjarna með því að nifteind breytist í róteind eða öfugt

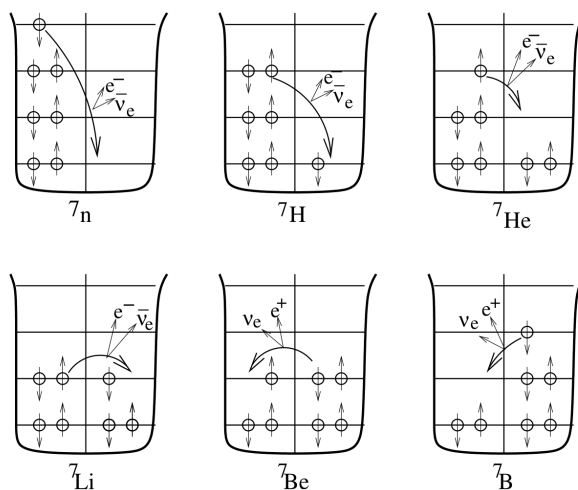
Meðalmættislíkanið



Frá Basdevant et al. (2005)

- Kjarni ${}^7\text{Li}$ er sá sterkast bundni
- Hann er stöðugur og sterkar bundin heldur en spegilkjarninn ${}^7\text{Be}$ sem líður fyrir hærri Coulomb fráhrindingar vegna fjögurra róteinda
- Í ${}^7\text{Be}$ kjarna er eru orkustig róteindanna hærri vegna Coulomb víxlverkunar

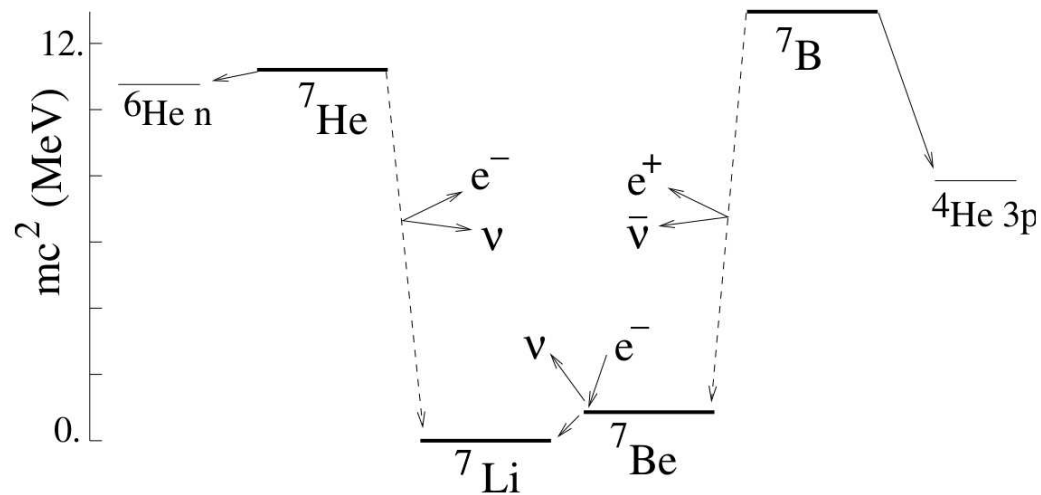
Meðalmættislíkanið



Frá Basdevant et al. (2005)

- Spegilkjarnarnir ${}^7_5\text{B}$ og ${}^7_2\text{He}$ geta β -hrörnað í ${}^7_4\text{Be}$ og ${}^7_3\text{Li}$
- Í raun eru auka róteindir eða nifteindir í ástöndum sem eru það há í orku að útgeislun nifteinda er möguleg fyrir ${}^7_2\text{He}$ og þriggja róteinda útgeislun er möguleg fyrir ${}^7_5\text{B}$ og þetta eru megin hrörnunarferlin

Meðalmættislíkanið



Frá Basdevant et al. (2005)

- Þegar útgeislun nifteindar er möguleg er líftíminn mjög stuttur
 $\tau \sim 10^{-22}$ s fyrir ${}^7\text{B}$ og $\tau \sim 10^{-21}$ s fyrir ${}^7\text{He}$
- Engin bundin ástönd hafa fundist fyrir ${}^7\text{n}$, ${}^7\text{H}$, ${}^7\text{C}$, og ${}^7\text{N}$

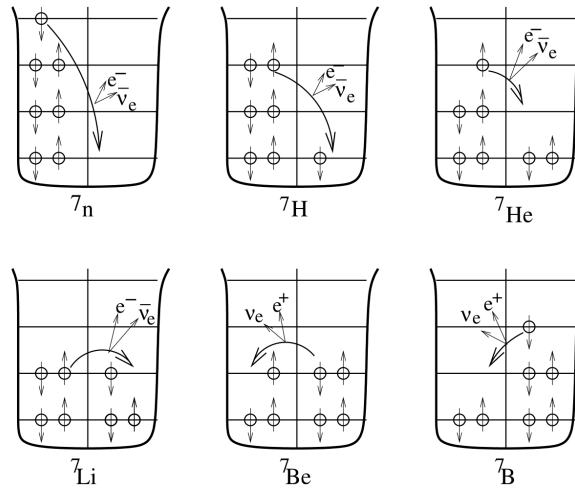
Meðalmættislíkanið

- Með því að skoða kjarnann sem óháðar kjarneindir í meðalmætti sjáum við eftirfarandi:
 - Fyrir gefið A , er hægt að finna lægstu orku með bestun á fjölda róteinda og nifteinda
 - Ef róteindirnar væru ekki hlaðnar, þá myndu orkustigin vera þau sömu og fyrir nifteindir og besta staða væri $Z = N$ (eða $Z \pm 1$ fyrir oddatölu A)
 - Þetta er tilfellið fyrir léttu kjarna, en þegar A hækkar, þá hækka orkustig róteindanna í samanburði við nifteindir vegna Coulomb fráhrindingar, og besta staða er $N > Z$
 - Fyrir spegilkjarna, sem tengjast með skiptum á N og Z , veldur Coulomb fráhrinding því að $N > Z$ leiðir til sterkari bindingar en $Z > N$

Meðalmættislíkanið

- Einnig
 - Bindingin er sterkari þegar kjarneindirnar eru spyrtaar í þör nifteinda og þör róteinda með andstæða spuna
 - Þar sem krafturinn á milli kjarneinda er aðdráttarkraftur, er orkan lækkuð þegar kjarneindir eru í nálægð hvor við aðra en samkvæmt reglu Pauli er eingöngu mögulegt ef þær hafa andstæða spuna
 - Það eru til nokkur dæmi um þessa þörun. Meða hinna 160 jöfn-A, β -stöðugra kjarna, eru aðeins fjórir léttir kjarnar ^2H , ^6Li , ^{10}B , og ^{14}N , sem eru “odda-odda”, allir hinir eru “jöfn-jöfn”

Meðalmættislíkanið



Frá Basdevant et al. (2005)

- Einnig
 - Pauli reglan útskýrir hvers vegna nifteindir geta verið stöðugar í kjarna þegar frjálsar nifteindir eru óstöðugar
 - Mögulegar β -hrörnanir nifteinda í ${}^7\text{n}$, ${}^7\text{H}$, ${}^7\text{He}$ og ${}^7\text{Li}$ eru sýndar með örvum

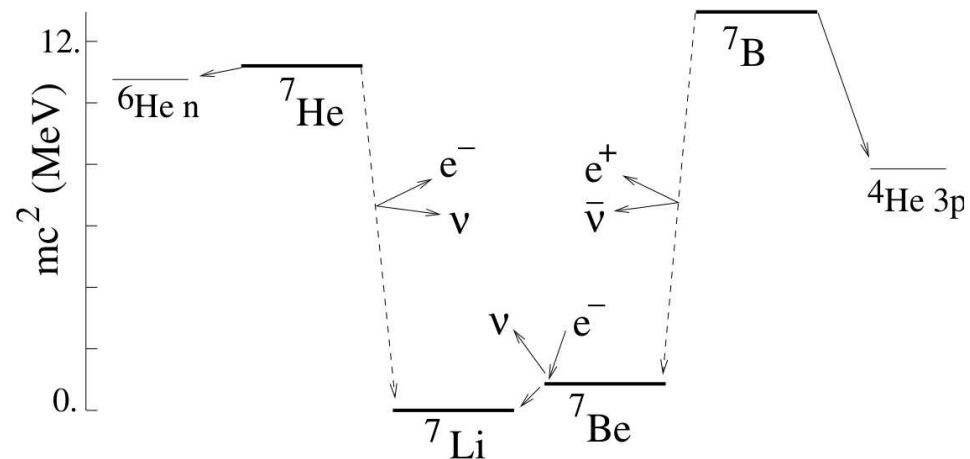
Meðalmættislíkanið

- og
 - Til að nifteind breytist í róteind með β -hrörnun, verður loka róteindin að finna orkustig þannig að ferlið $n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ sé orkulega mögulegt
 - Ef öll lægri orkuástönd eru setin, þá getur það verið ómögulegt
 - Það er tilfellið fyrir ${}^7\text{Li}$ þar sem Coulomb víxlverkun hækkar orkustig róteindarinnar örlítið meira en $(m_n - m_p - m_e)c^2 = 0.78$ MeV
 - Nifteindir verða þess vegna stöðugri vegna Pauli reglunnar

Meðalmættislíkanið

- Einnig
 - Á hinn veginn, getur róteind gert kjarna óstöðugan ef hvarfið $p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e$ getur átt sér stað
 - Þetta er mögulegt ef orkusstig róteindar er hækkað með Coulomb víxlverkun, um meira en sem nemur $(m_n + m_p - m_e)c^2 = 1.80$ MeV með tilliti til orkustigs nifteinda
 - Fyrir ${}^7\text{Li}$ og ${}^7\text{Be}$ rísa orkusstig róteinda um sem nemur gildi á milli $(m_n + m_p - m_e)c^2$ og $(m_n - m_e - m_p)c^2$ svo að hvorugur kjarni getur gengið í gegnum β -hrörnun

Meðalmættislíkanið



Frá Basdevant et al. (2005)

- ${}^7\text{Be}$ er óstöðugur vegna þess að rafeindahremming veldur ${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$

Meðalmættislíkanið

- Skðum nú aftur

$$V(r) = -V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = -V_0 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2, \quad r < R$$

- Við sjáum að

$$\omega(A) = \left(\frac{2V_0}{M} \right)^{1/2} R^{-1}$$

- Við segjum nú $V_0 = 20 \text{ MeV}$ og $R = 1.12A^{1/3}$ sem gefur

$$\hbar\omega = \left(\frac{2V_0}{m_p c^2} \right)^{1/2} \frac{\hbar c}{R} \sim 35 \text{ MeV} \times A^{-1/3}$$

- Við getum nú reiknað bindiorkuna $BE(A = 2N = 2Z)$ í þessu líkani

Meðalmættislíkanið

- Orkustigin í þrívíðum hreintóma sveifli eru $E_n = (n + 3/2)\hbar\omega$ með margfeldni $g_n = (n + 1)(n + 2)/2$
- Orkustigin eru fyllt upp að $n = n_{\max}$ þannig að

$$A = 4 \sum_{n=0}^{n_{\max}} g_n \sim 2n_{\max}^3/3$$

það er $n_{\max} \sim (3A/2)^{1/3}$, sem heldur fyrir stór A

- Tilsvarandi orka er

$$E = -AV_0 + 4 \sum_{n=0}^{n_{\max}} g_n (n + 3/2)\hbar\omega \sim -AV_0 + \frac{\hbar\omega n_{\max}^4}{2}$$

- Þá má sjá að $E \sim -8 \text{ MeV} \times A$ eða að bindiorka er um 8 MeV á kjarneind

Dropalíkanið

- Eitt fyrsta líkanið af kjarnanum var sett fram af Bohr 1935
- Það var byggt á hinum skammdrægu kjarnakröftum, ásamt með rúmmálum kjarnans og bindiorkum
- Kjarneindi víxlverka sterklega milli næstu granna eins og sameindir í vatnsdropa – **dropalíkanið**
- Líkanið byggir á vökva-dropa en inniheldur tvö atriði frá skammtafræði
- Annar þátturinn er ósamhverfu orkan, sem er hærri ef jafn mikið er af nifteindum og róteindum
- Hinn þátturinn er pörunarorkan, sem leitar í uppbyggingu þar sem tvær fermieindir eru paraðar

Dropalíkanið

- Massajafna Bethe og Weizsäcker er

$$BE(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A)$$

- Stuðlarnir a_i eru valdir þannig að þeir gefi góða nálgun á þekktum bindiorku gildum

Dropalíkanið

- Góð gildi eru

$$a_v = 15.753 \text{ MeV}$$

$$a_s = 17.804 \text{ MeV}$$

$$a_c = 0.7104 \text{ MeV}$$

$$a_a = 23.69 \text{ MeV}$$

og

$$\delta(A) = \begin{cases} 33.6A^{-3/4} & \text{ef } N \text{ og } Z \text{ eru jafnar} \\ -33.6A^{-3/4} & \text{ef } N \text{ og } Z \text{ eru odda} \\ 0 & \text{ef } A = N + Z \text{ er odda} \end{cases}$$

- Töluleg gildi á þessum stuðlum verður að ákvarða empirically (nema á

a_c

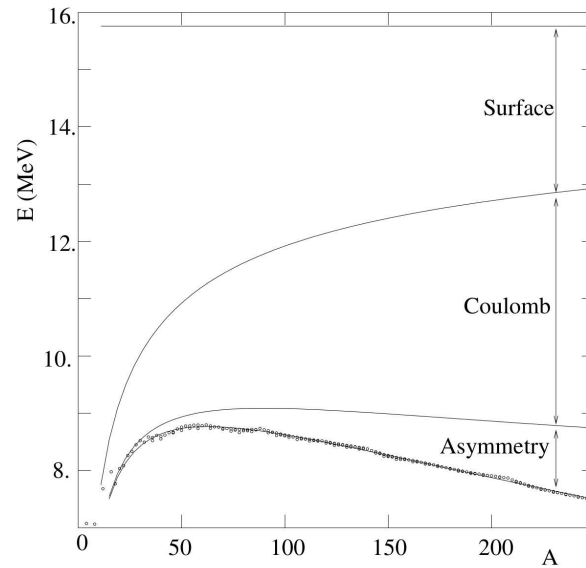
Dropalíkanið

- Fyrsti liðurinn er rúmmálsliðurinn sem endurspeglar víxlverkun næstu granna, og myndi einn og sér gefa fasta bindiorku fyrir hverja kjarneind sem er $BE/A \sim 16 \text{ MeV}$
- Liðurinn a_s , sem lækkar bindiorkuna, er yfirborðsliðurinn
 - Innri kjarneindir finna stefnusnauða víxlverkun en kjarneindir sem eru nærri yfirborði kjarnans finna aðeins krafta innan frá. Þess vegna er yfirborðsspennu liður, sem er í réttu hlutfalli við yfirborðsflatarmálið $4\pi R^2 \sim A^{2/3}$
- Liðurinn með a_c er Coulomb liðurinn fyrir róteindir, í réttu hlutfalli við Q^2/R , það er $\sim Z^2/A^{1/3}$
 - Þennan lið er hægt að reikna. Hann er minni en kjarna liðirnir fyrir lítil gildi á Z .

Dropalíkanið

- Ósamhverfu liðurinn a_a tekur samhverfu milli nifteinda og róteinda fram yfir (innspuni (e. isospin)). Ef ekki eru fyrir hendi rafkraftar er $Z = N$ orkulega hagstæðari
- Liðurinn $\delta(A)$ er pörunarliðurinn
- Vegna Coulomb liðarins og samhverfu liðarins er fyrir sérhvert gildi á A hægt að finna hæstu bindiorku kjarna með því að setja $\partial BE / \partial Z = 0$
- Við sjáum síðar að mesta binding er þegar $Z = N = A/2$ fyrir lítil A þar sem samhverfuliðurinn er ráðandi en Coulomb liðurinn leiðir til að $N > Z$ er hagstæðara fyrir stór A

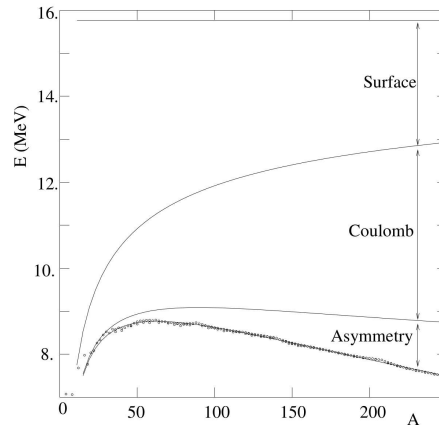
Dropalíkanið



Frá Basdevant et al. (2005)

- Reiknuð bindiorka er sýnd sem fall af A ásamt mældri bindiorku
- Myndin sýnir eingöngu jafn-odda kjarna þar sem pörunarliðurinn hverfur

Dropalíkanið



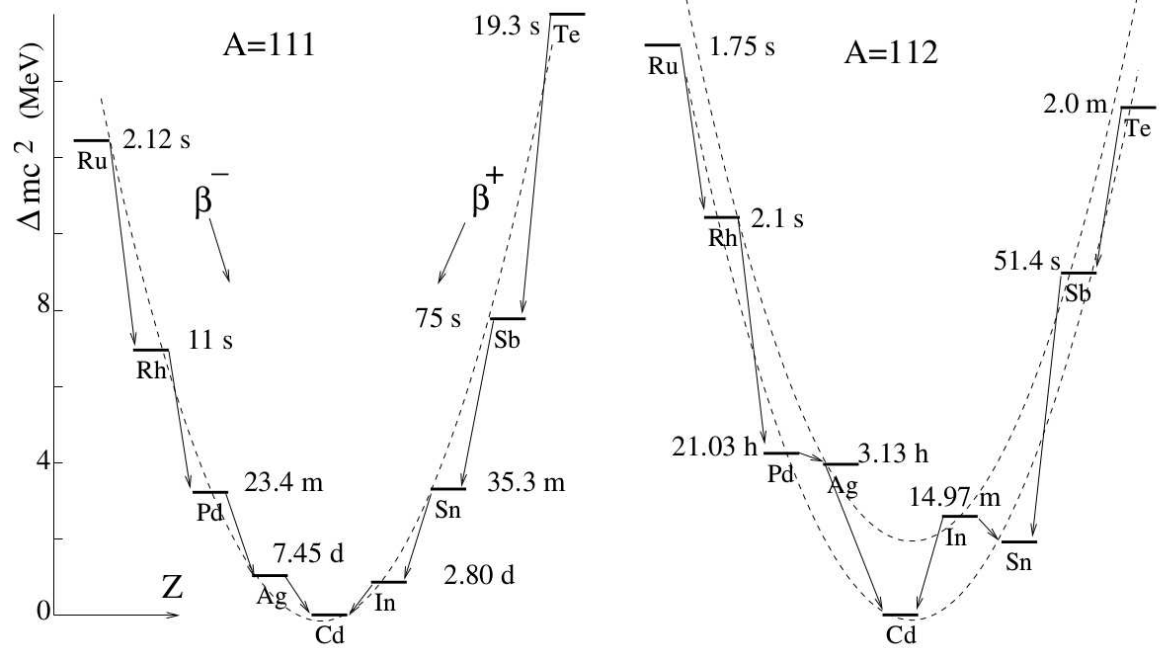
Frá Basdevant et al. (2005)

- Myndin sýnir líka framlag mismunandi liða í massajöfnunni
- Við sjáum að þegar A eykst þá minnkar vægi yfirborðspáttarins en Coulomb þátturinn eykur vægi sitt
- Bindiorkan tekur hæsta gildi um $A \sim 56$ sem svarar til jafn- Z samsætu járns og nikkels

Dropalíkanið

- Léttir kjarnar geta runnið saman í útvermnum hvörfum þar til þeir ná fastar bundnum kjörnum við $A \sim 56$
- Fyrir stór A er það aukið framlag Coulomb liðarins sem lækkar bindiorkuna
- Þetta útskýrir hvers vegna þyngri kjarnar losa orku í sundrun eða með α -hrörnun
- Þetta á sér stað aðallega fyrir njög þunga kjarna $A > 212$ vegna þess að líftíminn er almennt of langur fyrir smærri kjarna
- Fyrir jafna – odda kjarna, er bindiorkan fleygbogi í Z fyrir gefið A

Dropalíkanið



Frá Basdevant et al. (2005)

- Dæmi er sýnt hér að ofan fyrir $A = 111$

Dropalíkanið

- Minnsta gildið á fleygboganum, það er fjöldi nifteinda og róteinda sem svarar til hæstrar bindiorku kjarnans

$$\frac{\partial BE}{\partial Z} = 0$$

sem gefur

$$Z(A) = \frac{A}{2 + a_c A^{2/3} / 2a_a} \sim \frac{A/2}{1 + 0.0075 A^{2/3}}$$

- Þetta gildi á Z er nálægt en ekki endilegt jafnt því gildi á Z sem gefur stöðugan sammassa kjarna (e. isobar) fyrir gefið A
- Þetta er vegna þess að einnig verður að taka tillit til massa munar nifteindar og róteindar þegar skoðaður er stöðugleiki gagnvart β -hrörnun

Dropalíkanið

- Eini stöðugi kjarninn fyrir odda A er fengin með að finna minnsta frumeinda massa $m(A, Z) + Zm_e$ (lítum framjá bindiorku rafeindanna á frumeindinni)

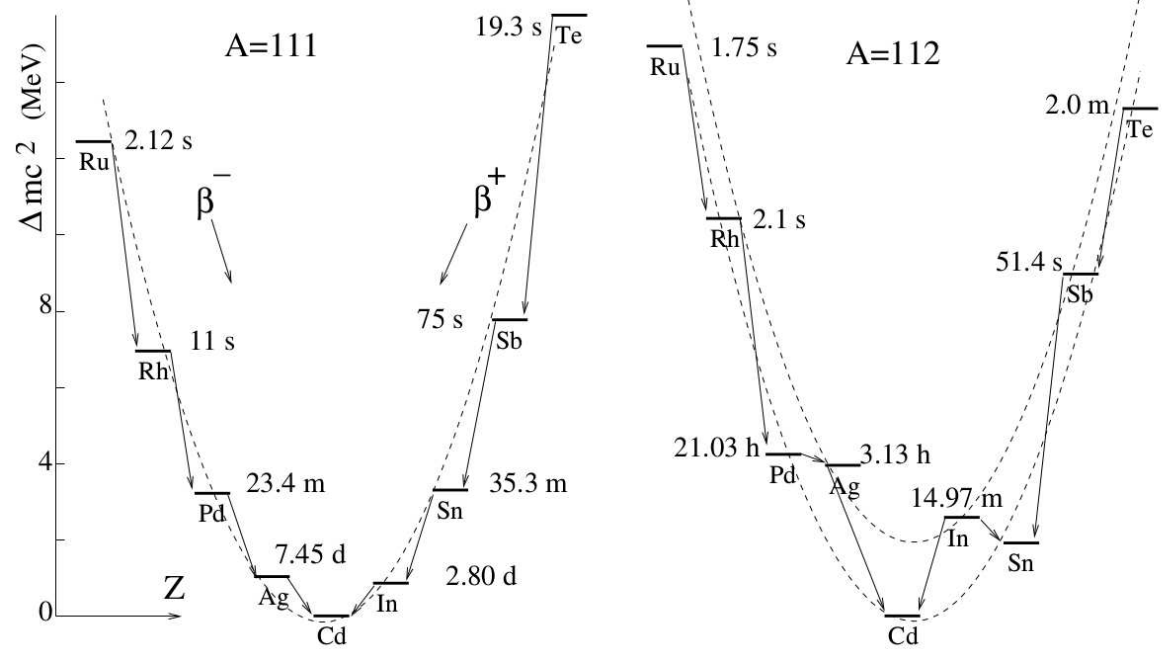
- Þetta leiðir til

$$Z(A) = \frac{(A/2)(1 + \delta_{npe}/4a_a)}{1 + a_c A^{2/3}/4a_a} \sim 1.01 \frac{A/2}{1 + 0.0075 A^{2/3}}$$

þar sem $\delta_{npe} = m_n - m_p - m_e = 0.75 \text{ MeV}$

- Þessi jafna gefur til kynna að léttir kjarnar hafa tilhneigingu til róteinda fremur en nifteinda vegna smærri massa á meðan þyngri kjarnar vilja fleiri nifteindir fram yfir róteindir vegna þess að aukin binding kjarneinda verður að vega upp á móti Coulomb fráhrindingu

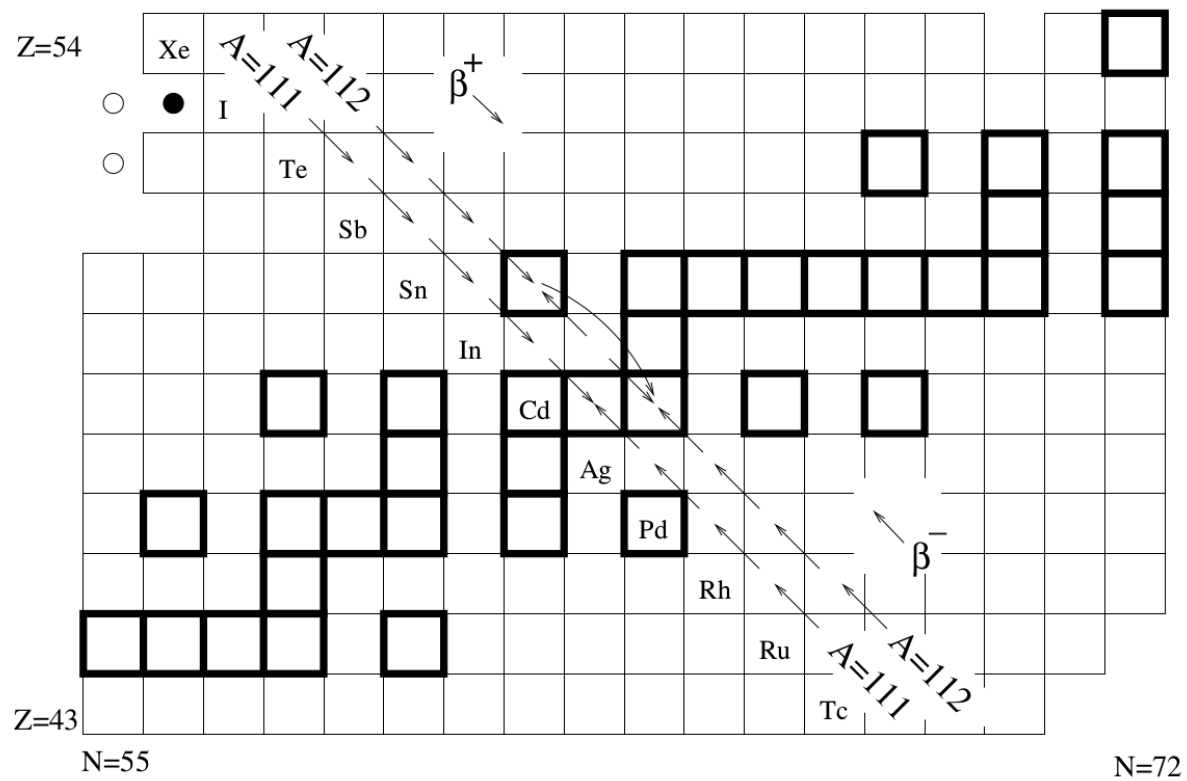
Dropalíkanið



Frá Basdevant et al. (2005)

- Fyrir jöfn A fylgir bindiorkan tveimur fleygbogum, einum fyrir jafna-jafna og öðrum fyrir odda-odda
- Dæmi um $A = 112$ er sýnd á mynd

Dropalíkanið



Frá Basdevant et al. (2005)

Dropalíkanið

- Jafna Bethe-Wizsäcker gefur mesta fjölda róteinda fyrir gefið N og mesta fjölda nifteinda fyrir gefið Z
- Mörkin eru ákvörðuð með því að krefjast þess að síðasta róteindin eða nifteindin sé bundin

$$BE(Z + 1, N) - BE(Z, N) > 0, \quad BE(Z, N + 1) - BE(Z, N) > 0$$

eða jafngilt

$$\frac{\partial BE(Z, N)}{\partial Z} > 0, \quad \frac{\partial BE(Z, N)}{\partial N} > 0$$

⇒ Dæmi 3.1.

Dropalíkanið

- Lítum nú á orkuna sem þarf til að fjarlægja kjarneind frá kjarnanum
- Setjum $M(Z, A)$ sem hvíldarmassa kjarnans (Z, A) þá má rita

$$M(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{BE(Z, A)}{c^2}$$

sem er the semiempirical mass formula (SEMF)

- Hana má einnig rita

$$M(Z, A) = Zm_p + Nm_n - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{2/3}} + \frac{a_a}{A} (A^2 + 4Z^2 - 4AZ) - \Delta$$

Dropalíkanið

- Þetta má einnig rita

$$M(Z, A) = (Am_p - a_v A + a_s A^{2/3} + a_a A) + Z(m_p - m_n - 4a_a) \\ + Z^2 \left(\frac{a_c}{A^{2/3}} + \frac{4a_a}{A} \right) - \Delta$$

eða

$$M(Z, A) = \alpha + \beta Z + \gamma Z^2 - \Delta$$

svo að massayfirborðið umhverfis stöðugleika er fleygbogi

- Fyrir fast A

$$\frac{\partial M(Z, A)}{\partial Z} = \beta + 2\gamma Z_0$$

þar sem

$$Z_0 = \frac{-\beta}{2\gamma}$$

Dropalíkanið

- Orkan er þá
 - β^- -hrörnun

$$Q_{\beta^-} = [M(Z, A) - M(Z + 1, A)] c^2$$

- Rafeindahremming

$$Q_{\text{EC}} = [M(Z, A) - M(Z - 1, A)] c^2$$

- Þetta segir að

$$Q_{\beta^-}((Z, A) \longrightarrow (Z + 1, A)) = -Q_{\text{EC}}((Z + 1, A) \longrightarrow (Z, A))$$

Dropalíkanið

- Orkan áfram
 - β^+ -hrörnun

$$Q_{\beta^+} = [M(Z, A) - M(Z - 1, A) - 2m_e] c^2$$

og

$$Q_{\beta^+} = Q_{\text{EC}} - 2m_e c^2$$

sem þá hefur orkuþröskuld

Dropalíkanið

- Ritað með SEMF

$$\begin{aligned}Q_{\beta^-} |_{A_{\text{odda}}} &= M(Z, A) - M(Z + 1, A) \\ &= \alpha + \beta Z + \gamma Z^2 - [\alpha + \beta(Z + 1) + \gamma(Z + 1)^2] \\ &= -\beta - \gamma - 2\gamma Z = 2\gamma Z_0 - \gamma - 2\gamma Z\end{aligned}$$

eða

$$Q_{\beta^-}(A_{\text{odda}}) = 2\gamma \left(Z_0 - Z - \frac{1}{2} \right)$$

svo að Q_{β^-} breytist línulega með Z með hallatölu -2γ

- γ skilgreinir bratta massa fleygbogans

$$\gamma = \frac{a_c}{A^{1/3}} + \frac{a_a}{A}$$

svo að fleygboginn verður breiðari þegar A eykst

- Fyrir α -hrörnun ritum við

$$Q_\alpha = [M(Z, A) - M(Z - 2, A - 4) - M(2, 2)] c^2$$

eða

$$Q_\alpha = BE(2, 2) + BE(Z - 2, A - 4) - BE(Z, A)$$

svo að

$$dBE = \frac{\partial BE}{\partial Z} dZ + \frac{\partial BE}{\partial A} dA$$

eða

$$Q_\alpha \approx BE(2, 2) - 2 \frac{\partial BE}{\partial Z} - 4 \frac{\partial BE}{\partial A}$$

og ef við beitum SEMF og $Q_\alpha = 0$ fæst

$$Z \geq 60 \quad \text{og} \quad A \geq 150$$

sem eru lægstu mögulegu massatölur þannig að α -hrörnun sé möguleg

Fermigas líkanið

- Fermigas líkanið er quantitative skammtafræðileg útfærsla á meðalmættislíkaninu sem við ræddum áður qualitatively
- Í þessu líkani er gert ráð fyrir að kjarninn samstandi af tveimur fermieindagösum, nifteindagasi og róteindagasi
- Þessar agnir víxverka ekki, en þær eru innilokaðar í kúlu sem hefur víddir radía kjarnans
- Í dropalíkaninu er byggt á mettun kjarnakraftana og orka kerfisins er tengd rúmfræðilegum eiginleikum
- Fermilíkanið er byggt á áhrifum tölfræði skammtafræðinnar á orku innilokaðra Fermieinda
- Fermilíkanið gefur færi á að reikna fastana a_v , a_s og a_a í Bethe-Weizsäcker jöfnunni beint frá þéttleika ρ kjarnaefnisins

Fermigas líkanið

- Fermilíkanið byggir á því að agnir með spuna $1/2$ sem eru innilokaðar í rúmmálinu V geta bara setið í tilteknum fjölda ástanda
- Á skriðþungaörs mæðinni $d^3\mathbf{p}$ er fjöldi ástanda

$$d\mathcal{N} = (2s + 1) \frac{V d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

þar sem $s = 1/2$

- Þetta gildir fyrir tening en er almennt gilt
- Það svarar til þéttleika í fasarúmi 2 ástanda á $2\pi\hbar^3$ af rúmmál fasarúmsins

Fermigas líkanið

- Við komum fyrir \mathcal{N} ögnum í rúmmálinu
- Í grunnástandi fylla agnirnar lægstu orkustigin, það er upp að Fermi skriðþunganum p_F sem svarar til mestu orku $E_F = p_F^2/2m$
- Fermi skriðþunginn er gefinn með

$$\mathcal{E} = \sum_{p < p_F} d\mathcal{N} = \frac{V p_F^3}{3\pi^2 h^3}$$

sem ákvarðar Fermi orkuna

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

þar sem n er þéttleiki $n = \mathcal{N}/V$

Fermigas líkanið

- Heildar (hreyfi)orka \mathcal{E} kerfisins er

$$\mathcal{E} = \sum_{p < p_F} \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{5} \mathcal{N} E_F$$

- Í kerfi $A = Z + N$ kjarneinda, eru þéttleikar nifteinda og róteinda $n_0(N/A)$ og $n_0(Z/A)$ þar sem $n_0 \sim 0.15 \text{ fm}^{-3}$
- Þá er heildar hreyfiorkan

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_Z + \mathcal{E}_N = \frac{3}{5} \left[Z \frac{h^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{Zn_0}{A} \right)^{2/3} + N \frac{h^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{Nn_0}{A} \right)^{2/3} \right]$$

Fermigas líkanið

- Í nálguninni $Z \sim N \sim A/2$, þá er

$$E_F = 35 \text{ MeV}$$

sem svarar til skriðþunga

$$p_F = 265 \text{ MeV}/c$$

og bylgjutölu

$$k_F = p_F/\hbar = 1.33 \text{ fm}^{-1}$$

Fermigas líkanið – rúmmál og yfirborðsorka

- Í raun er fjöldi ástanda gefin með

$$d\mathcal{N} = (2s + 1) \frac{V d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

ofmat vegna þess að þau svara til samfelldnimarkana $V \longrightarrow \infty$ þar sem orkumunurinn milli orkustiga hverfur

- Við skoðum nú fjölda ástanda í tening af stærð a

Fermigas líkanið – rúmmál og yfirborðsorka

- Bylgjufallið er þá

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{a^3}} \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n_3 \pi z}{a}\right)$$

og orkustigin

$$E = E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

þar sem $n_i > 0$, og telur fjölda ástanda þannig að $E \leq E_0$, E_0 fast, sem svarar til rúmmál áttungs kúlu í rúmminu $\{n_1, n_2, n_3\}$

Fermigas líkanið – rúmmál og yfirborðsorka

- Við þessa talningu á ekki að taka með planið $n_1 = 0, n_2 = 0$ og $n_3 = 0$ þar sem bylgjufallið er núll, og svarar ekki til raunverulegri stöðu
- Þegar fjöldi ástanda er mikill eins og í safneðlisfræði er þessi skekkja óvera
- Þessi skekkja er ekki óvera hér
- Það sem verður umfram má meta með

$$\Delta\mathcal{N} = \frac{p_F^2 S}{8\pi\hbar^2} = \frac{mE_F S}{4\pi\hbar^2}$$

þar sem S er ytra yfirborð rúmmálsins V ($S = 6a^2$ fyrir tening og $S = 4\pi r_0^2$ fyrir kúlu)

Fermigas líkanið – rúmmál og yfirborðsorka

- Eftir þessa leiðréttingu höfum við

$$\mathcal{N} = \frac{V p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} - \frac{S p_F^2}{4\pi \hbar^2}$$

- Þetta svarar til orku

$$\mathcal{E} = \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} d\mathcal{N}(p) = \frac{V p_F^3 E_F}{5\pi^2 \hbar^2} - \frac{S E_F p_F^2}{8\pi \hbar^2}$$

- Fyrri liðurinn er orkan í rúmmálinu og síðari liðurinn er leiðrétting fyrir yfirborðið, eða yfirborðs spennu liður
- Sem fyrstu nálgun í S/V er hreyfiorka á hverja ögn

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{N}} = \frac{3}{5} E_F \left(1 + \frac{\pi S \hbar}{8V p_F} + \dots \right)$$

Fermigas líkanið – rúmmál og yfirborðsorka

- Í nalguninni $Z \sim N \sim A/2$, er hreyfiorkan

$$E_c = a_0 A + a_s A^{2/3}$$

með

$$a_0 = \frac{3}{5} E_F = 21 \text{ MeV}$$

$$a_s = \frac{3}{5} E_F \frac{3\pi\hbar}{8r_0 p_F} = 16.1 \text{ MeV}$$

- Seinni liðurinn er yfirborðsstuðullinn, a_s og ber vel saman við gildi þau sem fundin eru með tilraunum

Fermigas líkanið – rúmmál og yfirborðsorka

- Meðalorkan á ögn er summan $a_v = a_0 - U$ þar sem U er mættisorkan sem finna má með tilraunum þar sem nifteindum er tvístrað af kjörnum og $U \sim -40$ MeV þannig að

$$a_v \sim 19 \text{ MeV}$$

sem er nálægt því sem áður var nefnt

Fermigas líkanið – ósamhverfuliður

- Gerum nú ráð fyrir kerfi tveggja Fermi gasa, með N nifteindum og Z róteinda innan sömu kúlu af radía R
- Heildarorka þessara tveggja gasa er

$$E = \frac{3}{5}E_F \left[N \left(\frac{2N}{A} \right)^{2/3} + Z \left(\frac{2Z}{A} \right)^{2/3} \right]$$

þar sem litið er fram hjá yfirborðsorku

- Ef við liðum þessa jöfnu fyrir $\Delta = N - Z$, fáum við

$$E = \frac{3}{5}E_F + \frac{E_F}{3} \frac{(N - Z)^2}{A} + \dots$$

sem er nákvæmlega formið á ósamhverfuliðnum í Bethe – Weizsäcker jöfnunni

Fermigas líkanið – ósamhverfuliður

- Hins vegar er tölulegt gildi á stuðlinum $a_v \sim 12 \text{ MeV}$ sem er um helmingur empirical gildisins
- Þetta stafar af því að Fermi líkanið er of einfalt og lýsir ekki nægjanlega vel víxlverkun kjarneinda

⇒ Dæmi 3.2.

⇒ Dæmi 3.3.

⇒ Dæmi 3.4.

Frekari upplýsingar

- Þessi kafli er að mestu byggður á kafla 2 hjá Basdevant et al. (2005). Sambærilega umfjöllun má finna í kaflum 3.3 og 3.4 hjá Krane (1988) og í kaflum 6.6 og 6.7 hjá Segré (1977).

Heimildir

Basdevant, J.-L., J. Rich, and M. Spiro (2005). *Fundamentals in Nuclear Physics: From Nuclear Structure to Cosmology*. New York: Springer Verlag.

Krane, K. S. (1988). *Introductory Nuclear Physics*. New York: John Wiley & Sons.

Segré, E. (1977). *Nuclei and Particles* (2 ed.). Redwood City, California: Addison-Wesley.