Greining rása:

Möskva- og hnútpunktajöfnur

Kafli 3

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@raunvis.hi.is

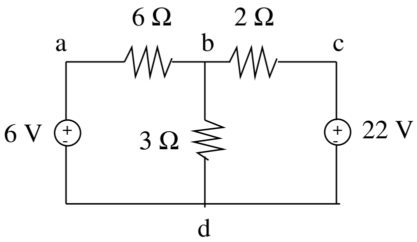
19. janúar 1999

Heimildir

- L. P. Huelsman, *Basic Circuit Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, 1984, Kaflar 2 og 3.1 - 3.7
- R.A. DeCarlo og Pen-Min Lin, *Linear Circuit Analysis: Time Domain, Phasor and Laplace Transform Approaches*, Prentice Hall, 1995, Kafli 4

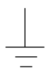
Hnútpunktajöfnur

Með því að beita straumlögmál Kirchhoffs og lögmáli Ohms má setja fram almenna kerfisbundna aðferð til að leysa viðnámsrásir.



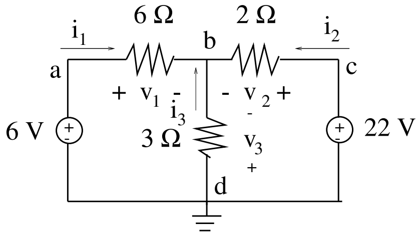
Veljum einn hnútpunkt sem viðmiðunarpunkt. Spenna í sérhverjum öðrum hnútpunkti er þá skilgreind miðað við þennan viðmiðunarpunkt.

Spennan í viðmiðunarpunktinum er þá samkvæmt skilgreiningu núll (sbr. **jarðtenging**)



Hnútpunktajöfnur

Veljum t.d. hnútpunkt d sem jörð og skilgreinum strauma og spennur.



Sjáum strax að $v_a = 6$ V og $v_c = 22$ V.

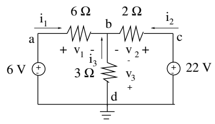
Skrifum síðan KCL - jöfnu fyrir hnútpunktinn með óþekktu spennunni v_b

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

eða

$$\frac{v_1}{6\Omega} + \frac{v_2}{2\Omega} + \frac{v_3}{3\Omega} = 0$$

Hnútpunktajöfnur



Með KVL fæst síðan

$$v_1 = v_a - v_b = 6\text{V} - v_b$$

$$v_2 = v_c - v_b = 22\text{V} - v_b$$

$$v_3 = -v_b$$

sem gefur

$$\frac{6 - v_b}{6} + \frac{22 - v_b}{2} + \frac{(-v_b)}{3} = 0$$

Leysum fyrir v_b og fáum $v_b = 12$ V.

Síðan er

$$i_1 = \frac{6 - v_b}{6} = -1\text{A}, \qquad i_2 = \frac{22 - v_b}{2} = 5\text{A},$$

$$i_3 = \frac{-v_b}{3} = -4\text{A}$$

Hnútpunktajöfnur

Kerfisbundin aðferð til að setja upp KCL - jöfnur fyrir alla þá hnútpunkta sem hafa óþekkta spennu:

1. Velja viðmiðunarpunkt og jarðtengja hann. Að öðru jöfnu er sá hnútpunktur valinn sem flestar spennulindir tengjast.
2. Skrifa eina jöfnu fyrir hverja spennulind:
   - Ef lindin er jarðtengd er hnútpunktsspennan lindarspennan
   - Einföld jafna sem gefur samband milli hnútpunktsspennu beggja póla lindar
3. Skrifa KCL- jöfnu fyrir alla hnútpunkta sem eftir eru; nota lögmál Ohms til að breyta þeim yfir í hnútpunktaspennur
4. Leysa jöfnuhneppið sem fæst úr liðum 2. og 3.

Hnútpunktajöfnur

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.1.

Sjáum að sérhver spennulind í rás fækkar óþekktum hnútpunktaspennum um eina, sem þýðir að jöfnum sem leysa þarf fækkar líka um eina.

Spennulind sem tengist við viðmiðunarpunkt gefur einfalda jöfnu sem gefur spennu í einum hnútpunkti.

Sé spennulind ekki jarðtengd er ekki hægt að lýsa beint straumnum í henni. Hér verður að skoða báða hnútpunktana sem lindin tengist.

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.2.

Hnútpunktajöfnur má almennt skrifa á stöðluðu formi þar sem vissrar samhverfu gætir.

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.3.

Hnútpunktajöfnur

Almennt má rita fyrir rás

$$\mathbf{G}\mathbf{v}(t) = \mathbf{i}(t)$$

þar sem fylkið $\mathbf{G}$ hefur stökin g_{ij} og

- g_{ii} er summa leiðnigilda allra viðnáma (í mho) sem tengjast hnútpunkti i
- g_{ij} er neikvæð summa allra leiðnigilda viðnáma (í mho) sem tengjast bæði hnútpunkti i og hnútpunkti j

Stök vigursins $\mathbf{v}(t)$ eru óþekktu hnútpunktaspennurnar v_i

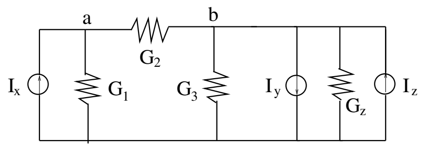
Vigurinn $\mathbf{i}(t)$ inniheldur straumlindir rásarinnar þar sem i_i er summa allra straumlinda sem tengjast hnútpunkti i; straumlind sem stefnir inn í punkt i reiknast jákvæð; straumlind sem stefnir útúr punkti i reiknast neikvæð.

Spennulindir með annan pól jarðtengdan koma í stað viðkomandi hnútpunktsspennu. Flóknara er ef hvorugur póll spennulindar er jarðtengdur.

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.4.

Hnútpunktajöfnur

Skoðum eftirfarandi rás



Skrifum upp hnútpunktajöfnur á staðalformi:

Punktur a:

$$(G_1 + G_2)v_a - G_2 v_b = I_x$$

Punktur b:

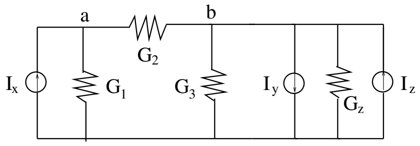
$$-G_2 v_a + (G_2 + G_3 + G_z)v_b = -I_y + I_z$$

Hnútpunktajöfnur

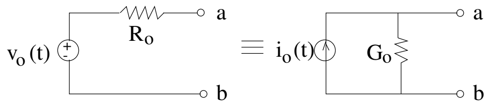
sem má rita

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3+G_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \\ -I_y+I_z \end{bmatrix}$$

Þetta er sama fylkjajafna og í dæmi 3.4. ef $G_z = G_4$ og $I_z = G_4 v_z$.



Umbreyting linda



Athuga ber að þetta eru aðeins jafngildar rásir miðað við pólana a og b.

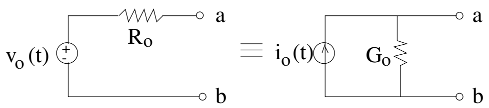
Séu rásirnar ótengdar eyðist ekkert afl í rásinni til vinstri á myndinni en í rásinni til hægri eyðist aflið

$$p_o = \frac{i_o^2}{G_o} = i_o^2 R_o$$

Sé skammhleypt milli a og b eyðist ekkert afl í rásinni til hægri en í rásinni til vinstri eyðist aflið

$$p_o = i_o^2 R_o$$

Umbreyting linda



Spennulind v_o með raðtengdu viðnámi R_o má alltaf umbreyta í straumlind i_o með hliðtengdri leiðni G_o þar sem

$$G_o = \frac{1}{R_o}$$

og

$$i_o = \frac{v_o}{R_o} = v_o G_o$$

Þetta gildir í báðar áttir, þ.e. straumlind i_o með hliðtengdri leiðni G_o má umbreyta í spennulind v_o með raðtengdu viðnámi R_o, þar sem

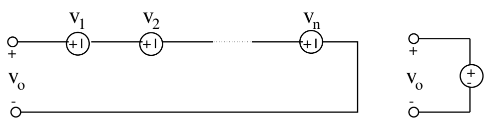
$$R_o = \frac{1}{G_o}$$

og

$$v_o = \frac{i_o}{G_o} = i_o R_o$$

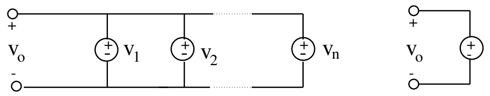
Raðtenging og hliðtenging linda

Raðtenging spennulinda



Með KVL fæst

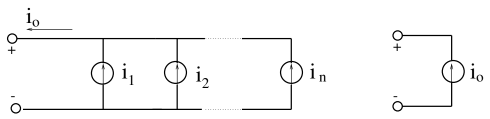
$$v_o = \sum_{i=1}^{n} v_i$$



Hliðtenging spennulinda gengur ekki nema allar séu eins

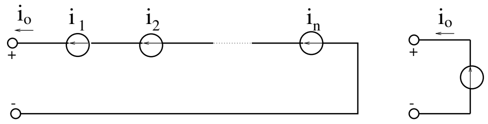
Raðtenging og hliðtenging linda

Hliðtenging straumlinda



Með KCL fæst

$$i_o = \sum_{i=1}^{n} i_i$$

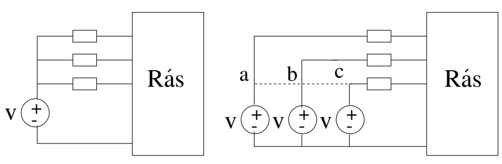


Raðtenging straumlinda gengur ekki nema allar séu eins

Raðtenging og hliðtenging linda

Spennulind

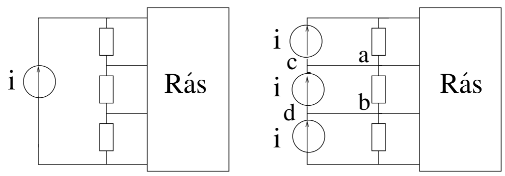
Oft getur verið sniðugt að skipta einni lind út fyrir margar lindir



Spennumunur milli punkta a og b er núll (enginn straumur) svo að fjarlægja má tenginguna. Hið sama gildir fyrir b - c og c - a.

Raðtenging og hliðtenging linda

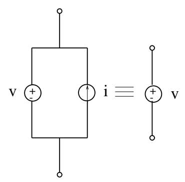
Straumlind



Òskilgreind spenna í punktum c og d, tengja má hvaða aðra hnútpunkta sem er við þá.

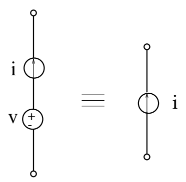
Enginn straumur er frá a til c og b til d, það hefur því ekki áhrif á verkun rásarinnar hvort hnútpunktarnir séu tengdir eður ei

Raðtenging og hliðtenging linda



Spennulind með innra viðnám núll. Föst spenna en straumurinn í gegnum straumlind er óskilgreindur

$\Longrightarrow$ jafngildir spennulind



Straumlind heldur ákveðnum straum óháð spennunni sem er óskilgreind

$\Longrightarrow$ jafngildir straumlind

Raðtenging og hliðtenging linda

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.5.

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.6.

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.7.

Lykkju- og möskvajöfnur

À sama hátt og hnútpunktajöfnur byggja á KCL þá eru til jöfnukerfi sem byggja á KVL, svo kallaðar **lykkjujöfnur** eða **möskvajöfnur**

KVL segir að summa **spennurisa** (**-falla**) eftir lokaðri leið sé núll.

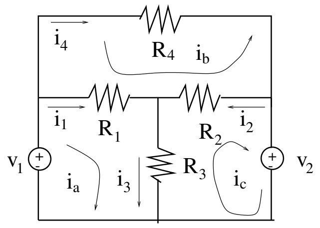
Ef þessi leið er lokuð lykkja raunverulegra tenginga, þá tölum við um **lykkjujöfnur**.

Rás, sem teikna má á blaði án þess að nokkrar línur skerist, kallast **flöt rás**.

Minnstu **lykkjur** í flatri rás kallast **möskvar**. Möskvi er lykkja, en lykkja þarf ekki að vera möskvi. KVL umhverfis möskva gefur **möskvajöfnu**

Lykkju- og möskvajöfnur

Hugsum okkur einn straum sem flýtur í hverjum möskva, svo kallað **möskvastrauma**



Hér er $i_1 = i_a + i_b$, $i_2 = -i_b - i_c$, $i_3 = i_a - i_c$ og $i_4 = -i_b$

þ.e. möskvastraumar eru straumþættir sem mynda straumana í hverri rásaeiningu fyrir sig

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.8.

Lykkju- og möskvajöfnur

Þegar greina á rás með möskvajöfnum er byrjað á að skilgreina möskvastraum í hverjum möskva fyrir sig, réttsælis eða rangsælis.

Síðan er skrifuð KVL jafna fyrir hvern möskva með spennu yfir viðnám sem fall af möskvastraumnum í gegnum viðnámið.

Innan hverrar jöfnu verður að gæta samræmis. Ef allir möskvastraumar eru skilgreindir réttsælis eða rangsælis fæst viss samhverfa í jöfnunum.

Við fáum fylkjajöfnu á forminu

$$\mathbf{R}\mathbf{i}(t) = \mathbf{v}(t)$$

þar sem fylkið $\mathbf{R}$ hefur stökin:

- r_{ii} er summa viðnáma í i-ta möskva
- r_{ij} er negatíf summa viðnám sem eru bæði í möskva i og j

Lykkju- og möskvajöfnur

Vigurinn $\mathbf{i}(t)$ eru óþekktu möskvastraumarnir i_i og vigurinn $\mathbf{v}(t)$ eru spennulindir í möskva i.

Hver spennulind hefur jákvætt formerki ef hún vinnur með viðkomandi möskvastraum en neikvætt ef hún vinnur gegn honum.

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.9.

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.10.

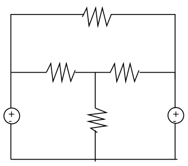
Einnig má beita hér aðferðinni með umbreytingu linda, þ.e. breyta straumlind með hliðtengdu viðnámi í spennulind með raðtengdu viðnámi.

Rás sem ekki er flöt er erfitt að greina með möskvaaðferðinni því möskvar eru ekki skilgreindir nema í flötum rásum.

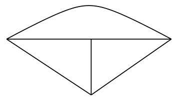
Lykkju- og möskvajöfnur

- **Graf** rásar er einföld rásamynd þar sem allar einingar eru sýndar sem línur
- **Hnútpunktur** er punktur þar sem tvær eða fleiri rásaeiningar tengjast saman
- **Grein** er leið milli tveggja hnútpunkta sem inniheldur enga rásaeiningu
- **Lykkja** er mengi greina sem myndar lokaða leið sem fer ekki meira en einu sinni í gegnum hvern hnútpunkt
- **Flöt rás** er rás sem teikna má á flötu yfirborði þannig að engar greinar skerast
- **Tré** er mengi greina sem tengir alla hnútpunkta rásar og inniheldur engar lykkjur
- **Hlekkur** er grein sem ekki er í tilteknu tré
- **Möskvi** er lykkja sem engar greinar liggja innan í

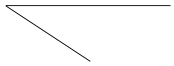
Lykkju- og möskvajöfnur



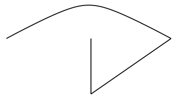
Rás



Graf



Tré



Tré

Lykkju- og möskvajöfnur

Ef graf rásar hefur N hnútpunkta, þá hefur sérhvert tré $N-1$ grein.

Ef heildarfjöldi greina er B þá verður fjöldi hlekkja L þ.a.

$$L = \text{heildarfjöldi greina} - \text{fjöldi greina í tré}$$

$$L = B - (N-1) = B - N + 1$$

Til að setja upp óháðar jöfnur fyrir sérhverja rás veljum við fyrst tré og skilgreinum síðan einn (og aðeins einn) lykkjustraum í hverjum hlekk. Þar með fáum við $B - N + 1$ óháðar jöfnur.

Lykkju- og möskvajöfnur

Ef straumlind er í rásinni veljum við tréð þannig að straumlindin sé hlekkur, þá vitum við strax einn lykkjustraum.

Fyrir sérhverja rás sem greina á verður að skoða vandlega hvort hnútpunktajöfnur eða möskvajöfnur (lykkjujöfnur) henta betur

Ef rásin hefur N hnútpunkta þá er einn valinn sem viðmiðunarpunktur og við fáum því $N-1$ hnútpunktajöfnur, en $B-N+1$ möskvajöfnur (lykkjujöfnur).

$\Longrightarrow$ Dæmi 3.11.