Greining rása:

Merki

Kafli 6

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@raunvis.hi.is

9. febrúar 1999

Heimildir

- D. E. Scott, *An Introduction to Circuit Analysis - A Systems Approach*, McGraw-Hill, 1987, Kafli 3
- R.A. DeCarlo og Pen-Min Lin, *Linear Circuit Analysis: Time Domain, Phasor and Laplace Transform Approaches*, Prentice Hall, 1995, Kafli 13.4

Inngangur

Hingað til hefur aðeins verið fjallað um jafnspennurásir, þ.e. rásir þar sem spennur og straumar eru fastar og breytast ekki með tíma.

Þegar lindarspennur og -straumar breytast með tíma er þeim lýst með tímaföllum sem við köllum **merki**

Einingarþrepfallið

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{ef} \quad t > 0 \\ 0 & \text{ef} \quad t < 0 \end{cases}$$

það er óskilgreint í $t = 0$.

Straumlind eða spennulind sem kveikt er á eða slökkt á við tímann $t = t_o$ má lýsa með einingarþrepfallinu.

$\Longrightarrow$ Dæmi 6.1.

$\Longrightarrow$ Dæmi 6.2.

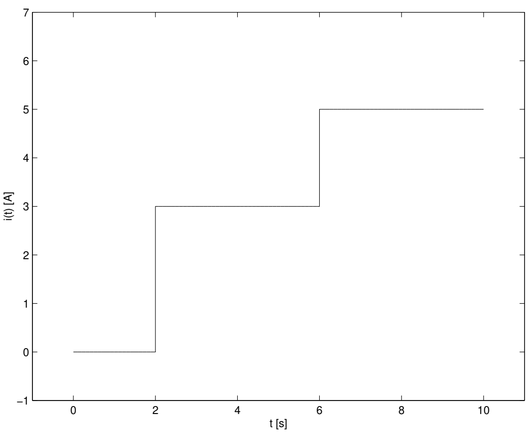
Ì MATLAB er summa einingarþrepfalla

$$f(t) = 2u(t-6) + 3u(t-2)$$

teiknuð með

```
t=0:0.001:10;
i1 = 2 * stepfun(t,6);
i2 = 3 * stepfun(t,2);
i3 = i1 + i2;
figure(1)
plot(t,i3)
xlabel('t [s]');
ylabel('i(t) [A]');
axis([-1 11 -1 7]);
print -deps 'step.eps'
```

sem gefur



$\Longrightarrow$ Dæmi 6.3.

$\Longrightarrow$ Dæmi 6.4.

Einingarimpúlsinn

Skoðum púls (ferkanntaðan) með flatarmálið 1. Púlsinn $f_p(t)$ varir í Δ sekúndur og hefur hæðina $1/\Delta$.

Látum nú $\Delta \longrightarrow 0$, og þá verður púlsinn mjórri og hærri.

Markgildið er óendanlega hár og óendanlega mjór púls sem hefur flatarmálið 1. Þetta er **einingarimpúlsinn**

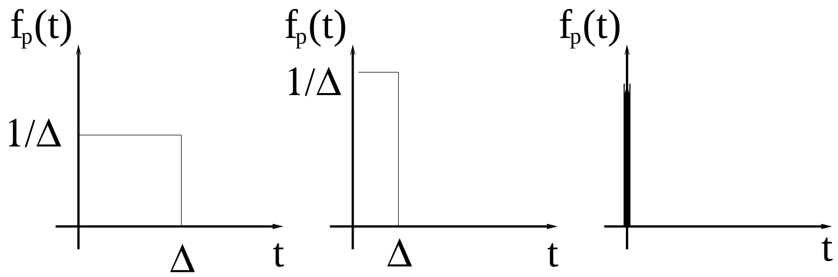
$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} f_p(t)$$

þar sem

$$f_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{ef} \quad 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Við sjáum að impúlsfallið er allsstaðar núll nema þar sem argúment þess er núll, þar er það óendanlega hátt.

Einingarimpúlsinn



Ef púlsinn var upphaflega K/Δ á hæð og Δ á breidd, þá er flatarmál hans $(K/\Delta)\Delta = K$ og skrifa má hann sem

$$f(t) = K f_p(t)$$

þá fæst

$$\lim_{\Delta\to 0} f(t) = \lim_{\Delta\to 0} K f_p(t) = K \lim_{\Delta\to 0} f_p(t) = K\delta(t)$$

þ.e. það að margfalda impúls með tölu (fasta) breytir aðeins flatarmáli hans, ekki hæð né breidd.

Einingarimpúlsinn

Diffurkvóti einingarþrepfallsins er allsstaðar núll, nema við $t = 0$, þar er hann óendanlega hár, samanber impúls.

Nálgum $u(t)$ með $\tilde{u}(t)$ svo

$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} \tilde{u}(t)$$

Diffurkvóti $\tilde{u}(t)$ er einingarimpúlsinn

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t} = f_p(t)$$

en þegar $\Delta \longrightarrow 0$ verður

$$\lim_{\Delta \to 0} f_p(t) = \delta(t)$$

þ.e. einingarimpúlsinn er diffurkvóti einingarþrepfallsins.

Einingarimpúlsinn

Impúlsinn er ekki fall í ströngustu merkingu. Spennulind sem gefur impúls, t.d. $v(t) = 10\delta(t)$ er heldur ekki til.

En það er hægt að búa til nálgun á impúls, t.d. spennulind sem fer frá 0 til 1.000.000 V og aftur í 0 á um 1 μs, sem er nægilega góð nálgun í flestum tilfellum.

Einingarflatarmálið kemur til vegna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = u(0^+) - u(0^-) = 1$$

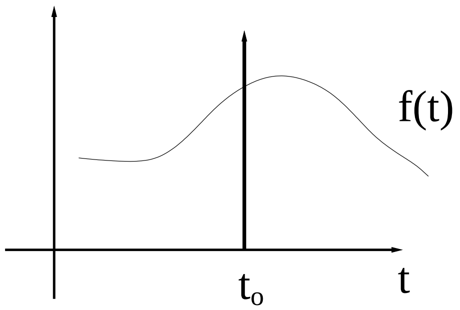
$\Longrightarrow$ Dæmi 6.5.

Einingarimpúlsinn

Almennt má finna

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_o)\mathrm{d}t$$

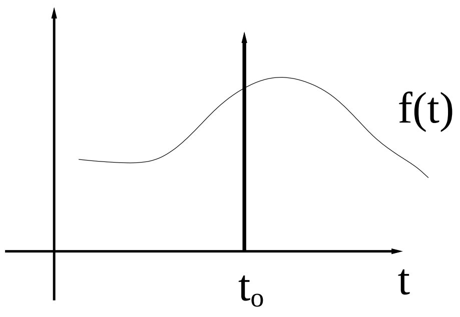
þ.e. tegrið af einhverju falli $f(t)$ margfölduðu með impúlsi við tímann t_o.



Þessi stærð er núll allsstaðar nema í $t = t_o$ (því $\delta(t - t_o)$ er núll nema í $t = t_o$). Því má skrifa tegrið sem

$$I = \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} f(t)\delta(t - t_o)\mathrm{d}t$$

Einingarimpúlsinn



Gerum síðan ráð fyrir að $f(t)$ breytist ekki yfir örstutt tímabilið $[t_{0-}, t_{0+}]$ og meðhöndlum fallið $f(t)$ sem fasta $f(t_o)$; og tökum út fyrir og fáum

$$I = f(t_o) \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} \delta(t - t_o) \mathrm{d}t = f(t_o)$$

Því að tegrið af impúlsinum er 1.

Almennt er

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_o) \mathrm{d}t = f(t_o)$$

$\Longrightarrow$ Dæmi 6.6.

Einingarrampinn

Skoðum nú tegrið af einingarþrepfallinu

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau - t_o)\mathrm{d}\tau = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{ef} & t < t_o \\ t - t_o & \text{ef} & t > t_o \end{array} \right\}$$

eða

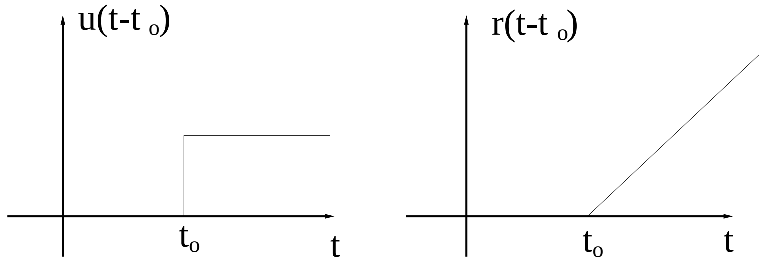
$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau - t_o)\mathrm{d}\tau = (t - t_o)u(t - t_o)$$

Skilgreinum **einingarampann** $r(t)$ sem

$$r(t) = tu(t)$$

eða

$$r(t - t_o) = (t - t_o)u(t - t_o)$$



Einingarrampinn

Almennt má rita

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau - t_o)\mathrm{d}\tau = r(t - t_o)$$

Hallatala einingarrampans er 1 fyrir $t > t_o$ og 0 fyrir $t \leq t_o$, þ.e.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(t - t_o) = u(t - t_o)$$

Við getum haldið áfram og skilgreint einingar-fleygboga, einingar-þriðjugráðufall o.s.frv.

Veldisfallið

Algengt merki er

$$f(t) = A\mathrm{e}^{-at}$$

Við vitum að $\mathrm{e}^0 = 1$ svo að $f(0) = A\mathrm{e}^0 = A$.

Fyrir $t < 0$ þá er $f(t) > A$.

Ef veldisfallið er margfaldað með einingarþrepi þá fæst fall sem er núll fyrir $t < 0$ en veldisfall fyrir $t > 0$, þ.e.

$$f(t) = A\mathrm{e}^{-at}u(t)$$

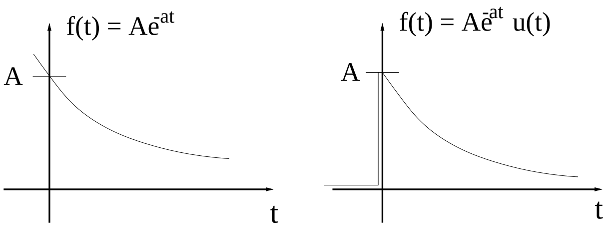
Tímastuðull veldisfallsins er skilgreindur með

$$\tau = \frac{1}{a}$$

og við $t = \tau$ fæst

$$f(\tau) = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}\tau} = A\frac{1}{\mathrm{e}}$$

Veldisfallið



Diffurkvóti veldisfallsins er aftur veldisfall

$$f(t) = A\mathrm{e}^{-at}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -aA\mathrm{e}^{-at}$$

Ef veldisfallið er margfaldað með einingarþrepfalli og diffrað þá fæst

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = A\left(\mathrm{e}^{-at}\delta(t) - a\mathrm{e}^{-at}u(t)\right)$$

eða

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = A\left(\delta(t) - a\mathrm{e}^{-at}u(t)\right)$$

$\Longrightarrow$ Dæmi 6.7.

Sínusfallið

Algengasta fallið er sínusfallið. Veituspennan er sinuslaga, svo og öll radíómerki.

Við notum sinus og cosinus jöfnum höndum. Dæmi um slíkt fall er

$$f(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

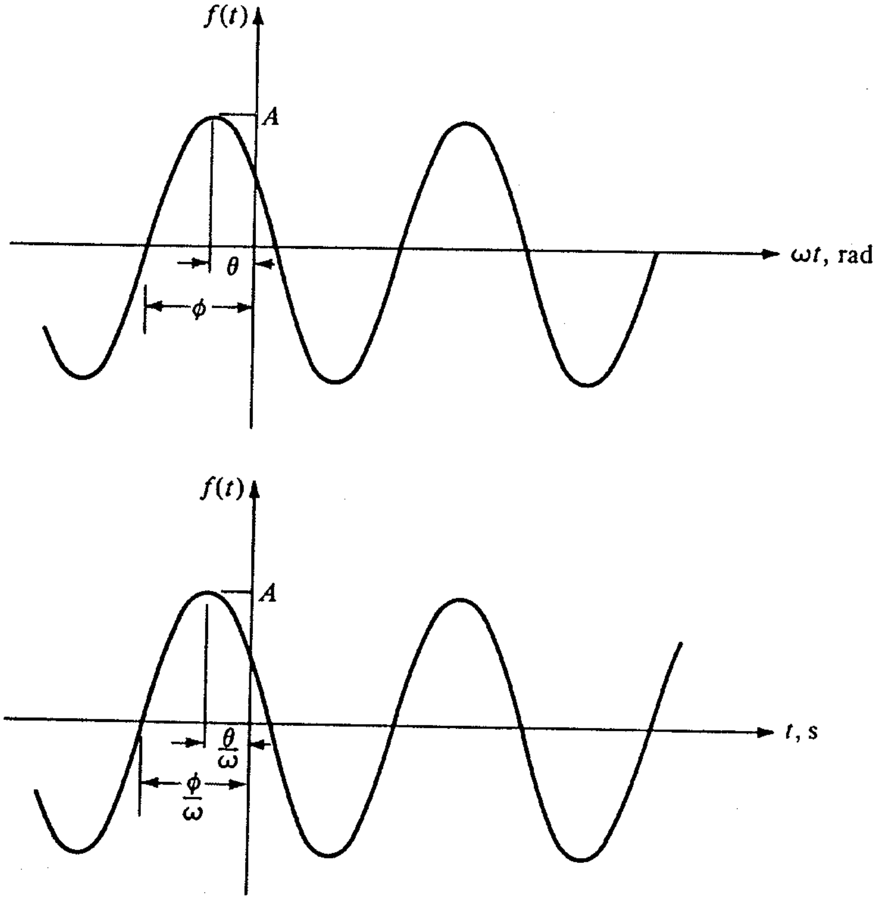
þar sem A, ω og θ eru fastar.

- A er útslag merkisins
- ω er horntíðni
- t er tími
- θ er fasahorn

Lotan T er sá tími sem það tekur argúment fallsins að fara frá 0 til 2π, þ.e. ef við tímann t_1 gildir $\omega t_1 + \theta = 0$ þá er $t_1 = -\theta/\omega$ og við tímann t_2 gildir $\omega t_2 + \theta = 2\pi$ þá er $t_2 = 2\pi - \theta/\omega$, þá er lota skilgreind sem

$$T = t_2 - t_1 = \frac{2\pi - \theta}{\omega} + \frac{\theta}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Sinusfallið



$$f(t) = A\cos(\omega t + \theta) = A\sin(\omega t + \phi)$$

og

$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2}$$

Fallið endurtekur sig á 2π radiana fresti eða á T sekúndna fresti.

Sinusfallið

Því gildir

$$f(t) = f(t + nT) \qquad\qquad n \in \mathcal{Z}$$

eða

$$\begin{aligned} f(t+nT) &= A\cos(\omega(t+nT)+\theta) \\ &= A\cos(\omega t + \omega nT) + \theta) \\ &= A\cos(\omega t + \omega n\frac{2\pi}{\omega} + \theta) \\ &= A\cos(\omega t + \theta + 2n\pi) \\ &= A\cos(\omega t + \theta) = f(t) \end{aligned}$$

Tímabilið T ákvarðar eina sveiflu af bylgjunni og einingin er sekúndur per sveiflu.

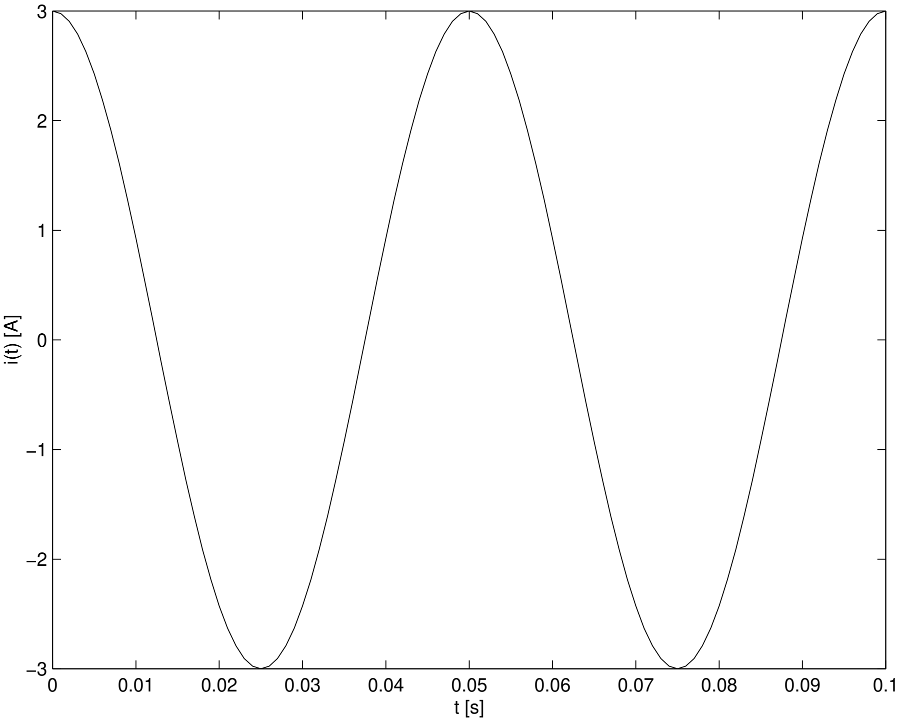
Andhverfa stærðin hefur eininguna sveiflur á sekúndu eða rið [Hz, Hertz] og kallast **tíðni** f, þ.e.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

eða

$$\omega = 2\pi f$$

Sinusfallið



Sagt er að sinusfallið sé $\pi/2$ rad ($90°$) á eftir cosinusfallinu og að cosinusfallið sé $\pi/2$ rad ($90°$) á undan sínusfallinu

$$\cos \omega t = \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin \omega t = \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$