Greining rása:

Orkugeymandi rásaeiningar

Kafli 7

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@raunvis.hi.is

5. febrúar 1999

Heimildir

- R.A. DeCarlo og Pen-Min Lin, *Linear Circuit Analysis: Time Domain, Phasor and Laplace Transform Approaches*, Prentice Hall, 1995, Kafli 7

Inngangur

Ì þessum kafla eru innleiddar rásaeiningarnar **þéttar** og **spólur**, sem kallaðar eru **orkugeymandi rásaeiningar**

Rásaeiningar eru eðlisfræðilegt fyrirbæri sem skilgreinir sambandið milli straumsins í gegnum eininguna og spennunnar yfir hana

Línulegt samband

Samband milli tveggja breyta x og y er **línulegt** ef það uppfyllir tvö skilyrði

- Ef $y = g(x)$ þá er $g(ax) = ay$, a er fasti
- Ef $y_1 = g(x_1)$ og $y_2 = g(x_2)$ þá er $g(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$

Línuleg rásaeining er sérhver sú rásaeining þar sem straumur og spenna tengjast með línlegum hætti.

Tegrun

Tegrun

$$y = g(x) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

þar sem

$$\begin{aligned} g(ax) &= \int_{-\infty}^{t} ax(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= a\int_{-\infty}^{t} ax(\tau)\mathrm{d}\tau = ag(x) = ay \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} g(x_1 + x_2) &= \int_{-\infty}^{t} (x_1(\tau) + x_2(\tau))\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= g(x_1) + g(x_2) = y_1 + y_2 \end{aligned}$$

er línuleg aðgerð

Diffrun

Diffrun

$$y(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = g(t)$$

þar sem

$$g(ax) = \frac{\mathrm{d}(ax(t))}{\mathrm{d}t} = a\frac{\mathrm{d}(x(t))}{\mathrm{d}t} = ag(x) = ay$$

og

$$\begin{aligned} g(x_1 + x_2) &= \frac{\mathrm{d}(x_1(t) + x_2(t))}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= g(x_1) + g(x_2) = y_1 + y_2 \end{aligned}$$

er línuleg aðgerð

Afl

Afl sem línuleg rásaeining fær frá umhverfi sínu er

$$p(t) = v(t)i(t)$$

Ef $p(t) < 0$ þá er rásaeiningin að láta frá sér afl

$$p(t) = \frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}$$

og

$$w(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)\mathrm{d}t$$

er orkan sem rásaeiningin fær frá umhverfi sínu

Þéttir

Þéttir er rásaeining þar sem samband straums og spennu er gefið með jöfnunni

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

þar sem stuðullinn C kallast **rýmd** þéttisins og hefur eininguna farad [F]

Með því að tegra báðar hliðar jöfnunnar frá $t = -\infty$ til einhvers tímapunkts t_o fæst

$$v(t_o) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_o} i(t)\mathrm{d}t$$

Tegrið $\int_{-\infty}^{t_o} i(t)\mathrm{d}t$ er nettóhleðslan q sem safnast hefur fyrir í þéttinum við tímann t_o af völdum straumsins sem streymt hefur inn í þéttinn frá $t = -\infty$ til $t = t_o$, þ.e.

$$q(t_o) = \int_{-\infty}^{t_o} i(t)\mathrm{d}t$$

Þéttir

svo að skrifa má

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} \qquad \text{fyri öll} \quad t$$

og þar með er

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}i(t)$$

Þéttir er línuleg rásaeining, sambandið milli spennu og hleðslu er línulegt og straumurinn finnst með því að diffra hleðsluna, sem er línuleg aðgerð

Þéttir er rásaeining sem geymir hleðslu; því meiri hleðslu sem hann geymir, þeim mun hærri spenna mælist yfir hann

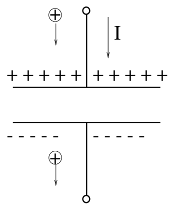
Einingin er

$$1\ \mathrm{F} = \frac{1\ \mathrm{C}}{1\ \mathrm{V}}$$

Þéttir

Þéttir er gerður úr tveim leiðandi plötum með einangrandi (rafsvara) efni á milli

Þegar fastur straumur I streymir “um” þétti þá safnast jákvæðar hleðslur jafnt og þétt á plötuna þar sem straumurinn streymir inn



Jákvæðar hleðslur flæða út úr þéttinum hinummegin svo að heildar hleðslan á þeirri plötu verður neikvæð. Þar sem straumur út er jafn stór og straumur inn þá er jafn stór hleðsla á báðum plötunum, $q(t)$, aðeins með mismunandi formerki.

Þéttir

Milli jákvæðu hleðslanna á annarri plötunni og neikvæðu hleðslanna á hinni plötunni ríkir aðdráttarkraftur, þ.e. þéttirinn **geymir orku**.

Þessa orku má finna sem tegrið af aflinu sem þéttirinn hefur fengið frá umhverfi sínu, við einhvern tíma $t = t_o$

$$w(t_o) = \int_{-\infty}^{t_o} p(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{t_o} v(t)i(t)\mathrm{d}t$$

Notum að $i(t) = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$

$$w(t_o) = \int_{q(-\infty)}^{q(t_o)} v(t)\mathrm{d}t = \int_{v(-\infty)}^{v(t_o)} Cv(t)\mathrm{d}v$$

með $v(-\infty) = 0$ fæst

$$w(t_o) = \frac{1}{2}Cv^2(t_o)$$

eða almennt

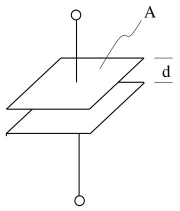
$$w(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

Þéttir

Þar með er aflið

$$p(t) = Cv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v(t)i(t)$$

Gerum nú ráð fyrir plötuþétti sem samanstendur af plötum með flatarmál A og aðskilnað d



Ef plöturnar hafa hleðslu Q þá er **yfirborðshleðsluþéttleiki**

$$\rho_s = \frac{Q}{A}$$

Þéttir

Rafsviðsstyrkur E milli platnanna er einsleitur af styrk

$$E = \frac{\rho_s}{\epsilon}$$

með $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_o$ þar sem ϵ_o er **rafsvörunarstuðull lofttæmis** og ϵ_r er **hlutfallslegur rafsvörunar- stuðull** efnisins milli platnanna

Spennan yfir þéttinn er þá

$$v = \int_1^2 \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{s} = Ed$$

og rýmdin

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{\epsilon A}{d}$$

Þéttir

Tveir mikilvægir eiginleikar þéttis

- Ef spenna yfir þétti er sínuslaga

  $$v_C(t) = V\sin(\omega t)$$

  þá verður straumurinn

  $$i_C(t) = C\omega V\cos(\omega t)$$

  þ.e. í beinu hlutfalli við tíðnina

  $$\text{há tíðni} \longrightarrow \text{hár straumur}$$

  $$\text{lág tíðni} \longrightarrow \text{lítill straumur}$$

  Ef tíðnin er mjög há má setja skammhlaup í stað þéttisins og ef hún er núll (dc) má setja opna rás í stað þéttis.

- Til að spennan $v_C(t)$ yfir þéttinn geti breyst ósamfellt verður straumurinn $i_C(t)$ að vera óendanlega hár, þ.e. impúls

Þéttir

Því má segja að ef engir impúlsar eru til staðar þá verður spennan yfir þéttinn alltaf samfelld, þ.e. engin spennuþrep eru möguleg (nema impúlsar komi til)

$\Longrightarrow$ Dæmi 7.1.

Spenna yfir sérhvern þétti við $t > 0$ ræðst af tvennu:

- Hvaða straumur hefur flætt inn í þéttinn síðan $t = 0$
- Hvaða spenna var yfir þéttinn við $t = 0$

Þetta má skrifa sem

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Fyrra tegrið er nettóhleðslan sem safnast hefur í þéttinum á tímabilinu $-\infty < t < 0$. Þegar deilt er með rýmd þéttisins C þá fæst spennan yfir þéttinn við tímann $t = 0$.

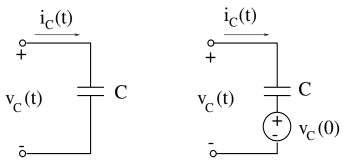
Þess vegna er

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau$$

eða

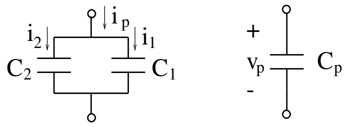
$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

sem segir að í stað þéttis sem hefur upphafsgildi við $t = 0$ má setja jafnstóran þétti sem er óhlaðinn við $t = 0$ og raðtengda spennulind með spennu $v_C(0)$.



Þéttir

$\Longrightarrow$ Dæmi 7.2.



Ef tveir þéttar C_1 og C_2 eru hliðtengdir má setja í stað þeirra einn jafngildisþétti C_p.

$$i_p = C_p\frac{\mathrm{d}V_p}{\mathrm{d}t}$$

eða

$$i_p = i_1 + i_2 = C_1\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} + C_2\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}$$

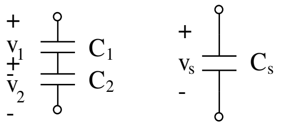
og þar sem $V_p = V_1 = V_2$ þá er

$$i_p = (C_1 + C_2)\frac{\mathrm{d}V_p}{\mathrm{d}t}$$

eða

$$C_p = C_1 + C_2$$

Þéttir



Ef tveir þéttar C_1 og C_2 eru raðtengdir má setja í stað þeirra einn jafngildisþétti C_s

$$v_s(t) = \frac{1}{C_s}\int_{-\infty}^{t} i_s(\tau)\mathrm{d}\tau$$

eða þar eð $v_s = v_1(t) + v_2(t)$ þá er

$$v_s(t) = \frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

og $i_s = i_1 = i_2$ svo að

$$v_s(t) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1}\right)\int_{-\infty}^{t} i_s(\tau)\mathrm{d}\tau$$

eða

$$C_s = \left(\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

Spóla

Línuleg spóla er rásaeining þar sem samband straums og spennu er gefið með jöfnunni

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

Stuðullinn L kallast **span** spólunnar og hefur eininguna henry [H]

Með því að tegra báðar hliðar jöfnunnar frá $t = -\infty$ til einhvers tímapunkts t_o fæst

$$i(t_o) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_o} v(t)\mathrm{d}t$$

þ.e. straumurinn í spólunni ræðst af því hvernig spennan yfir hana hefur verið frá upphafi

Spóla

Við getum séð að spólan er orkugeymandi rásaeining með því að finna heildarorkuna sem hún hefur þegið frá umhverfi sínu:

$$w(t_o) = \int_{-\infty}^{t_o} p(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{t_o} v(t)i(t)\mathrm{d}t$$

eða

$$w(t_o) = \int_{-\infty}^{t_o} L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}i(t)\mathrm{d}t = L\int_{i(-\infty)}^{i(t_o)} i(t)\mathrm{d}i$$

Með $i(-\infty) = 0$ fæst

$$w(t_o) = L\frac{i^2(t_o)}{2}$$

eða almennt

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

Þar með er aflið

$$p(t) = Li(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = i(t)v(t)$$

Spóla

Lítum á tvo mikilvæga eiginleika spólu:

- Ef straumurinn í spólunni er sínuslaga

  $$i_L(t) = I\sin(\omega t)$$

  þá verður spennan

  $$v_L(t) = L\omega I\cos(\omega t)$$

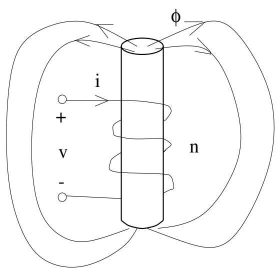
  þ.e. í beinu hlutfalli við tíðnina

  $$\text{há tíðni} \longrightarrow \text{há spenna}$$

  $$\text{lág tíðni} \longrightarrow \text{lág spenna}$$

  Ef tíðnin er mjög há má setja opna rás í stað spólunnar og ef hún er núll (dc) má setja skammhlaup í stað spólunnar
- Ef engir spennuimpúlsar eru til staðar þá er straumurinn í spólunni samfelldur, þ.e. enginn straumþrep eru möguleg (nema impúls komi til)

Spóla



Dæmigerð spóla er undin úr viðnámslausum vír með n vindingum. Ef straumur i fer um spóluna þá myndast segulsvið $\phi(t)$ sem hefur lokaðar segulsviðslínur.

Spennan yfir spóluna er tímaafleiðan af segulflæðinu $n\phi$,

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n\phi) = n\frac{\mathrm{d}(\phi)}{\mathrm{d}t}$$

Jákvæð spenna þýðir að segulsviðið sé að vaxa; neikvæð spenna þýðir að það fari minnkandi.

Spóla

Stærðin á segulflæðinu ϕ ræðst af straumnum $i(t)$. Sé spólan línuleg gildir

$$\phi(t) = \frac{L}{n} i(t)$$

Leysum fyrir strauminn

$$i(t) = \frac{1}{L} n\phi = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v(\tau) \mathrm{d}\tau$$

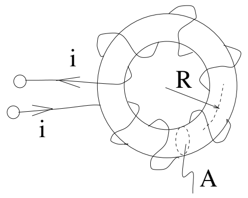
eða

$$n\phi = \int_{-\infty}^{t} v(\tau) \mathrm{d}\tau$$

sem þýðir að segulsviðið ræðst af því hver spennan hefur verið frá upphafi.

Span hverrar spólu ræðst af stærð hennar og lögun

Spóla



Fyrir hjólaslöngulaga spólu með n vindinga gildir

$$L = \frac{\mu_r \mu_o n^2 A}{2\pi R}$$

þar sem μ_o er **segulsvörunarstuðull lofttæmis**, μ_r er **hlutfallslegur segulsvörunarstuðull** efnis spólukjarna, A er þverskurðarflatarmál spólukjarnans og R er radíi spólunnar.

Almennt gildir að spanið er í réttu hlutfalli við vindingafjöldann í öðru veldi og í réttu hlutfalli við þverskurðarflatarmálið, en í öfugu hlutfalli við lengd leiðarinnar sem segulflæðið fer, l.

Spóla

Með

$$L = \frac{\mu n^2 A}{l}$$

fæst

$$\phi = \mathcal{P} n i$$

þar sem

$$\mathcal{P} = \frac{\mu A}{l}$$

kallast **segulleiðni** leiðarinnar sem segulflæðið fer.

Jafnan hér að ofan er því nokkurskonar Ohm lögmál fyrir segulrásir, þar sem segulflæðið ϕ samsvarar straum, ampervindingarnir ni (mmf, segulíspenna) samsvara spennu og **segultregðan** $\mathcal{R}$ samsvarar viðnámi

Spóla

Ef efnið sem segulflæðið fer um er loft eða lofttæmi (kjarnalaus spóla) þá er $\mathcal{R}$ fasti og sambandið milli ϕ og ni línulegt

Sé kjarninn úr járni eða öðru ferrómagnetísku efni þá er μ (og þar með $\mathcal{R}$) fall af ϕ svo að sambandið milli ϕ og ni verður ólínulegt

Jafnan $v = L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ gildir þá ekki

Hvort sem spólan er línuleg eða ekki þá gildir

$$w(t_o) = \int_{-\infty}^{t_o} v(t) i(t) \mathrm{d}t$$

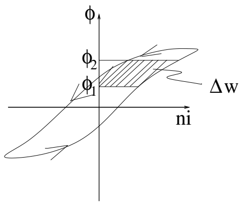
og

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}(n\phi)}{\mathrm{d}t}$$

eða

$$w(t_o) = \int_{-\infty}^{t_o} \frac{\mathrm{d}(n\phi)}{\mathrm{d}t} i(t) \mathrm{d}t = \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(t_o)} n i(t) \mathrm{d}\phi$$

Spóla



Orkan sem bætist við geymda orku í spólunni þegar flæðið vex frá ϕ_1 til ϕ_2 er jöfn flatarmálinu Δw

Sum ferrómagnetísk efni hafa mismunandi $\phi(ni)$ ferla eftir því hvort ni er vaxandi (spóla tekur til sín orku) eða minnkandi (spóla lætur frá sér orku)

Þetta fyrirbæri kallast **segulheldni**

Spóla

Sé straumurinn sínuslaga þá er öll segulheldnilykkjan farin í hverri lotu

Flatarmálið innan lykkjunnar gefur til kynna orkutapið í spólunni í hverri lotu. Sú orka umbreytist í varmaorku.

$\Longrightarrow$ Dæmi 7.3.

Fyrir $t > 0$ gildir að straumur í spólu er

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

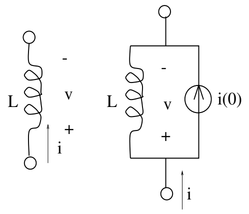
$$= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} v(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

eða

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Spóla

Ì stað spólu með upphafsstraum (við $t = 0$) má því setja spólu án upphafsstraums og hliðtengja straumlind $i(0)$ og reikna síðan strauma og spennur fyrir $t > 0$ út frá þessum gildum

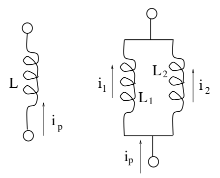


Ef tvær spólur L_1 of L_2 eru hliðtengdar má setja í stað þeirra eina jafngildisspólu L_p

$$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{-\infty}^{t} v_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$i_2 = \frac{1}{L_2}\int_{-\infty}^{t} v_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Spóla



og

$$i_p = i_1 + i_2$$

$$v_1 = v_2 = v_p$$

svo

$$i_p = i_1 + i_2 = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\int_{-\infty}^{t} v_p(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{L_p}\int_{-\infty}^{t} v_p(\tau)\mathrm{d}\tau$$

eða

$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Spóla

Ef tvær spólur L_1 og L_2 eru raðtengdar má setja í stað þeirra eina jafngildisspólu L_s

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \quad \text{og} \quad v_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

en

$$i_1 = i_2 = i_s$$

og

$$v_s = v_1 + v_2 = (L_1 + L_2)\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} = L_s \frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}$$

eða

$$L_s = L_1 + L_2$$