Seigja vökva

Tilraun í verklegri eðlisfræði

J. T. Gudmundsson

Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3, IS-107 Reykjavík
Iceland

1st March 1999

1 Inngangur

Seigju olíu í glasi má mæla á einfaldan hátt með því að láta kúlur falla í gegnum olíuna og mæla fallhraðann. Hana má einnig mæla með snúningspendli, þar sem kefli í olíunni dempar sveifluna. Hér er lýst tilraun þar sem báðum þessum mæliaðferðum er beitt. Tilgangur tilraunarinnar er að kynnast seigju vökva og jöfnu Navier-Stoke með mælingum og tölulegum reikningum. Annars vegar er beitt falltilraun Stokes og hins vegar notaður snúnings pendúll.

2 Fræðileg undirstaða

Við hreyfingu vökva verður orkutap. Það gerist þannig að hreyfiorka vökva getur breyst í varma. Þessi varmamyndun á sér stað inni í vökvanum sjálfum og stafar af innri núningi vökva. Þessi innri núningur vökva er kallaður seigja. Þessi varmamyndun fylgir varmafræðilega eingengu ferli.

Jafna Euler fyrir seigjulausan vökva er rituð [1],

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial(\Pi_{ik})}{\partial x_k} \tag{1}$$

þar sem þinillinn $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$ lýsir þéttleika skriðþungaflæðis í vökvanum. Þessi jafna lýsir fullkomlega viðsnúanlegu ferli. Ì raunvökvum kemur til liður sem tekur til seigju í vökvanum og ferlið verður óviðsnúanlegt, eingengt. Þá er skriðþungaflæðisþéttleikaþinillinn ritaður $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$, þar sem þinillinn σ_{ik} er nefndur spennuþinill og lýsir hann þeim hluta skriðþunga sem ekki stafar beint af skriðþungaflutningi með massa vökva [1].

Innri núningur í vökva kemur til af því að vökvaagnir hreyfast um vökvann með ólíkum hraða. Þannig er σ'_{ik} áð rúmafleiðu hraðans og ef hraðastiglar eru litlir má gera ráð fyrir að skriðþungaflutningur vegna seigju stafi aðeins af fyrstu afleiðum af hraða. Þá ber þess að geta að σ'_{ik} hverfur ef allur vökvinn er í jafnri hringhreyfingu, þar eð við slíka hreyfingu er engin núningur í vökvanum. Samkvæmt ofansögðu má rita þinilinn á forminu

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \tag{2}$$

þar sem η og ζ eru kallaðir seigjustuðlar. Stuðla þessir eru almennt háðir efninu, hitastigi þess og þrýstingi.

Sé þessum lið síðan bætt við upphaflega jöfnu Eulers fæst

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right) + \left(\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \tag{3}$$

sem má rita á vigurformi

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v} + \frac{\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)}{\rho}\nabla\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{4}$$

og í því tilfelli að vökvinn sé ósamþjappanlegur, þá verður jafnan

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v} \tag{5}$$

sem nefnd er jafna Navier-Stokes. Hlutfallið η/ρ er nefnt eðlisseigja og táknað með ν.

Þekkt er að hraði vökva við yfirborð er alltaf núll. Þetta gefur randskilyrði á ofangreinda hlutafleiðujöfnu eða $v = 0$ við yfirborð. Kraftur sá er á flatrmálseiningu verkar er [1]

$$\Pi_i = -\sigma_{ik}\mathbf{n}_k = pn_i + \sigma'_{ik}\mathbf{n}_k \tag{6}$$

þar sem $\mathbf{n}_i$ er normalvigur í yfirborðið. Fyrri liðurinn lýsir þrýstingi vökvans og sá síðari núningskraftur, vegna seigju, sem á yfirborðið verkar.

3 Mæling seigju með aðferð Stokes

Gerum nú ráð fyrir stöðugu streymi um kúlu í ósamþjappanlegum vökva. Þegar kúlan hreyfist með jöfnum hraða í gegnum vökvann eru það þrír þættir sem áhrif hafa á hreyfinguna. Fyrst er að nefna áður nefnda eðlisseigju, ν, þá er það hraðinn, u, og stærð hlutar, l. Úr þessum stærðum má skilgreina einingarlausa stærð

$$\mathrm{Re} = \frac{ul}{\nu} \tag{7}$$

sem nefnd er Reynoldstala.

Stöðugt flæði svarar til þess að $\partial v/\partial t = 0$. Sýna má að $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \approx u^2/l$ í Navier - Stokes jöfnunni í grennd við hlutinn og að seigjuliðurinn sé $(\eta/\rho)\Delta\mathbf{v} \approx \nu u/l^2$. Hlutfall þessara stærða er

$$\frac{\frac{u^2}{l}}{\frac{\nu u}{l^2}} = \mathrm{Re} \tag{8}$$

Reynoldstalan er eins og áður sagði einingarlaus stærð sem segir til um stöðugleikann í flæðinu og hvenær flæðið byrjar að vera iðustreymandi. Ef $\mathrm{Re} \ll 1$ má sleppa liðnum $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$. Ì þeim lið tilraunarinnar þar sem kúlur eru látnar falla hægt í vökva sem er mun seigari en vatn má ætla að $\mathrm{Re} \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ þannig að jafnan verður línuleg hlutafleiðujafna sem leyst er með tilheyrandi randskilyrðum fyrir kúlu. Þessi jafna er einfaldlega

$$\eta\Delta\mathbf{v} - \nabla p = 0 \tag{9}$$

Viðnámskrafturinn sem út úr þessari jöfnu fæst er gefinn með [1, 2]

$$\mathbf{F}_d = -6\pi\eta a u\hat{\mathbf{u}} \tag{10}$$

sem er lögmál Stokes.

Ì meiri fjarlægð frá kúlunni er liðurinn tekinn með nálgun og gefur þá lausn jöfnunnar

$$\mathbf{F}_d = -6\pi\eta a u\left(1 + \frac{3}{8}\mathrm{Re}\right)\hat{\mathbf{u}} \tag{11}$$

Einnig ber að hafa í huga að jafna þessi gildir ef vökvinn er endalaus. Ì raun er það ekki tilfellið svo að leiðrétta verður fyrir þessi áhrif. Taka verður inn þvermál glassins sem kúlan fellur í. Þetta gefur kraftinn

$$\mathbf{F}_d = -6\pi\eta a u\left(1 + \frac{3}{8}\mathrm{Re}\right)\left(1 + \frac{2\pi a}{3D}\right)\hat{\mathbf{u}} \tag{12}$$

Summa kraftanna sem á kúluna verkar er núll eða

$$F_{\text{þyngdarkraftur}} + F_{\text{uppdrifskraftur}} + F_{\text{viðnámskraftur}} = 0$$

Þessa staðreynd má síðan nota til að finna eðlisseigju vökvans, ef hraðinn er þekktur, með formúlunni

$$\eta = \frac{2ga^2(\rho_{\text{kúla}} - \rho_{\text{olía}})}{9u\left(1 + \frac{2\pi a}{3D}\right)} - \frac{3}{8}au\rho_{\text{olía}} \tag{13}$$

þar sem a er radíi kúlu og u er hraði hennar.

4 Mæling seigju með snúningspendli

Skoðum nú hina þrjá þætti Navier - Stokes jöfnunnar í sívalningshnitum. Viljum finna v_ϕ. Gerum nú ráð fyrir að $v_r = v_z = 0$ og $\partial/\partial\phi = 0$ þar eð ekki eru hringstraumar. Fyrir langt kefli er $\partial/\partial z = 0$. Þegar þetta er sett inn stendur eftir ein jafna

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r^2} \right) \tag{14}$$

og einnig með innsetningu á $u = rv_\phi$ fæst

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right) \tag{15}$$

og þá er

$$\sigma_{r\phi} = \eta \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) \eta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} \right) \tag{16}$$

Almennt er dempuðum snúningspendli lýst með jöfnunni

$$I\ddot{\phi} = -k\phi + \tau(\eta, \phi) = -k\phi - b\dot{\phi} \tag{17}$$

þar sem I er hverfitregða keflis og skífu, k er vægisstuðull vírsins og $\tau(\eta,\phi)$ er dempunarliður sem stafar af seigju. Lausn þessarar jöfnu fyrir ódempað kefli hefur horntíðni

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{k}{I}\right)^{1/2} \tag{18}$$

og þegar dempun

$$\gamma = \frac{b}{2I} \tag{19}$$

er tekin með er sveiflutíminn

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \left(\omega^2 - \gamma^2\right)^{1/2} \tag{20}$$

Þetta skapar þrjú tilfelli lausna:

- Undirdempuð sveifla $\omega^2 - \gamma^2 < 0$ með lausn

$$\phi(t) = A\exp(-\gamma t)\cos\omega_0 t$$

- Markdempuð sveifla $\omega^2 - \gamma^2 = 0$ með lausn

$$\phi(t) = A\exp(-\gamma t) + B\exp(-\gamma t)$$

- Yfirdempuð sveifla $\omega^2 - \gamma^2 > 0$ með lausn

$$\phi(t) = A\exp(-(\gamma + \omega_0)t)$$

Undirdempaða sveiflu viljum við skoða nánar með mælingum.

Vægisstuðull vírsins, k, er fengin með því að ákveða sveiflutíma fyrir þekktar hverfitregður. Með því að finna mismun hverfitregða tveggja kefla má síðan reikna k, Þannig fæst

$$k = 4\pi^2 \frac{I_1 - I_2}{T_1^2 - T_2^2} \tag{21}$$

Hverfitregða pendúls nr. i er þá rituð

$$I_0 + I_i = k \left(\frac{\tau_i}{2\pi} \right) \tag{22}$$

þar sem $i = 1, 2, 3$.

5 Framkvæmd tilraunar

Nú er seigja olíunnar mæld með ofangreindum tveimur aðferðum.

5.1 Mæling seigju með aðferð Stokes

Mæla skal seigju í Dentax W olíu frá Shell, sem ætluð er fyrir drif Peugeot bifreiða [3] og paraffín olíu. Olíunni er komið fyrir í 2000 ml mæliglasi af gerðinni Pyrex B.S.604.

Mælingin felst í því að mæla fallhraða lítilla málm- og glerkúlna með þekkt þvermál og eðlismassa. Hraðinn er ákvarðaður með því að mæla tímann sem það tekur kúlurnar að falla tiltekna vegalengd. Mælt er t.d. fallið á milli strikanna sem sýna 1800 ml og 200 ml eða sem svarar til 36,25 cm falls.

1. Mælið eðlismassa olíunnar
2. Finnið eðlismassa og radía kúlna
3. Leiðið út jöfnu fyrir seigju olíu sem fall af fallhraða kúlna
4. Mælið fallhraða kúlna í olíunni, hver er Reynoldstalan ? Er nálgunin hér að ofan réttlætanleg ?
5. Reiknið seigju olíunnar

5.2 Mæling seigju með snúningspendli

Snúningspendúll sá er notaður er við mælinguna er í raun vír sem í er fest kasthjól. Ì kasthjólið er síðan festur vísirinn sem bendir á sveifluhorn það sem sýnir snúning pendúls.

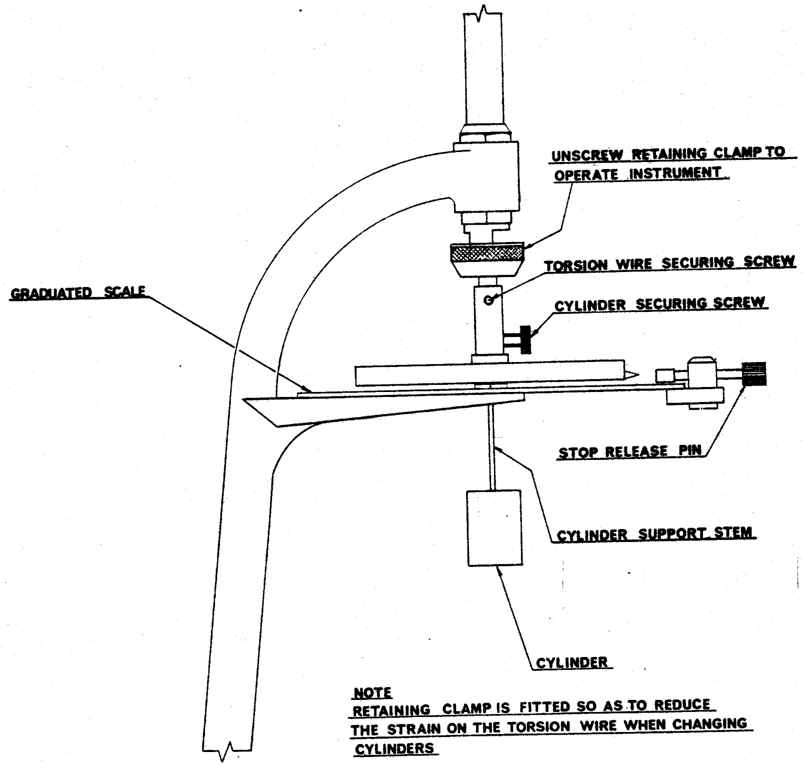

Figure 1: Snúningspendúll til seigjumælinga.

Neðan í vírinn má síðan hengja sívalninga eða kefli af nokkrum mismunandi stærðum og þyngdum.

Við mælingu á seigju eru þessi kefli látin snúst í bikar sem í er olía. Mælingin fer þannig fram að sívalningnum er snúið um -360° og sleppt. Ùtslag fyrstu sveiflunnar er mælt og síðan er lesin eðlisseigjan af grafi sem tækinu fylgir.

Til að ákvarða vægisstuðul vírsins var fyrst mælt með tveimur mismundi sívalningum án þess að olía væri til að dempa sveifluna. Þekkt er að hverfitregða gegnheils sívalnings er $I = (1/2)MR^2$. Til að fá réttan massa á sívalning þarf að draga frá massa stangar sem við hann er fest.

1. Komið kefli fyrir í olíunni
2. Snúið keflinu um -360°, sleppið og mælið útslag fyrstu sveiflunnar
3. Lesið eðlisseigju af grafi frá framleiðanda tækis og reiknið seigju olíunnar
4. Endurtakið fyrir samtals þrjú mismunandi kefli
5. Àkvarðið vægistuðul vírsins (notast í tölulegum reikningum)

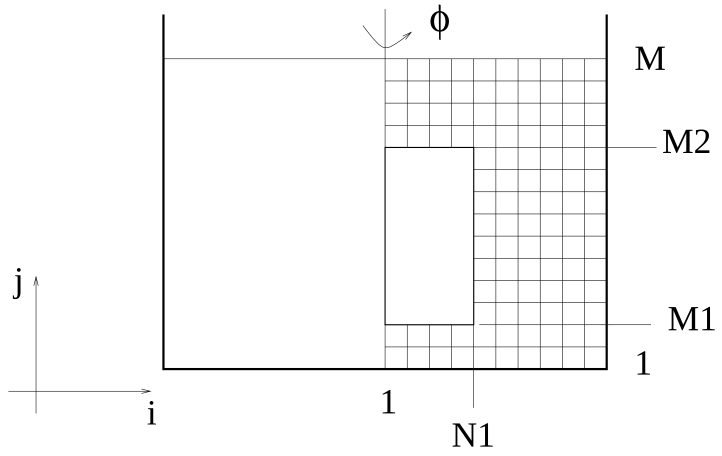

Figure 2: Skilgreining á neti fyrir tölulegt líkan af núningspendúll til seigjumælinga.

5.3 Töluleg lausn Navier - Stoke jöfnu

Forritið *tor01* reiknar út snúningshreyfingu keflisins og olíunnar í bikarnum. Það gerir ráð fyrir löngu kefli. Forritð má nota til að reikna út kvörðunarferla fyrir mismunandi kefli. Til þess verður að þekkja vægisstuðul vírsins. Ì forritinu er gert ráð fyrir að um hraðasviðið í sívalningshnitum gildi $v_r = 0$, $v_z = 0$ og $v_\phi = v_\phi(r, z)$. Þegar þetta hraðasvið með breytuskiptunum $u = rv_\phi$ er sett inn í Navier - Stoke jöfnuna einfaldast hún og eftir stendur jafna (15) hér að ofan.

Til að leysa vandamálið tölulega er skilgreint net og þess gætt að það passi við allar hliðar ílátsins og keflisins. Hraðasviðið á hverjum tíma á skurðpunktum netsins ræðst af $u(i, j, t)$. Ef Δt er notað sem tímaskref í reikningunum $u' = u(i, j, t+\Delta t)$ fæst eftirfarandi töluleg nálgun á jöfnu (15)

$$\frac{u' - u}{\Delta t} = \nu \frac{u(i+1,j) + u(i-1,j) - 2u(i,j)}{(\Delta r)^2}$$

$$-\frac{\nu}{r}\frac{u(i+1,j) + u(i-1,j)}{(2\Delta r)} + \nu \frac{u(i,j+1) + u(i,j-1) - 2u(i,j)}{(\Delta z)^2} \tag{23}$$

þar sem $r = \Delta r(i-1)$ og randskilyrðin eru $u(N, j) = u(i, j) = 0$ fyrir hliðar og botn íláts. À yfirborði olíu gildir $u(i, M) = u(i, M-1)$. Fyrir kefli þá er $u(N1, j) = \omega R_k^2$ á bilinu $M1 \leq j \leq M2$ og fyrir enda keflis $1 < i < N1$ þá er $u(i, M1) = u(i, M2) = \omega(\Delta r(i-1))^2$ þar sem ω er hornhraði keflis. Ì miðju, $r = 0$ og $i = 0$ gildir $u(1, j) = 0$.

Hreyfijafna keflisins er

$$I\ddot{\phi} + k\phi - \tau\dot{\phi} = 0 \tag{24}$$

og kraftvægið $\tau(\dot{\phi})$ er metið út frá hraðasviðinu í næstu tímapunktum á undan.

1. Lesið forritið yfir, leiðréttið villur, og teiknið flæðirit fyrir það og fáið það til að virka
2. Hvernig er hornhraðinn reiknaður ?
3. Notið forritið til að reikna kvörðunargraf fyrir mælingu á eðlisseigju olíu með mismunandi keflum
4. Teiknið útreiknað kvörðunargraf inn á ljósrit af kvörðunargrafi framleiðanda mælitækis
5. Ræðið mun á gröfum og takmarkanir forrits

References

[1] L.D. Landau and E.M. Liftshiftz, *Fluid Mechanics*, 2nd edition, Pergamon Press, 1987

[2] R. B. Bird, W. E. Stewart and E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, 1960

[3] Auglýsingabæklingur frá Skeljungi h.f.