Verkleg eðlisfræði:

Seigja vökva

Tilraun 4

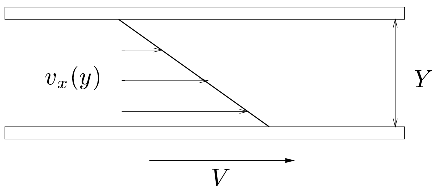
Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

9. febrúar 2000

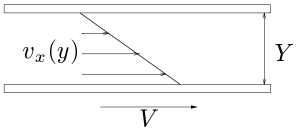
Almennt um seigju

- Sá eðliseiginleiki sem er einkennandi fyrir rennslisviðnám einfaldra vökva er **seigja**
- Gerum ráð fyrir vökva sem situr á milli tveggja stórra samsíða platna sem hafa yfirborðsflatarmál A og aðskilnað Y
- Gerum ráð fyrir að kerfið sé upphaflega í kyrrstöðu við tímann $t = 0$
- Við $t = 0$ er neðri platan sett á hreyfingu með fastann hraða V



- Í fyllingu tímans verður hraðadreifingin í vökvanum eins og myndin sýnir

Almennt um seigju



- Þegar þessu æstæða ástandi hefur verið náð þarf fastan kraft F til að viðhalda hreyfingu neðri plötunnar

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y}$$

- Það er krafturinn á einingarflatarmál er í réttu hlutfalli við hraðaminnkunina yfir fjarlægðina Y
- Þetta má rita sem

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}$$

sem segir að **skerkraftur** á einingarflöt sé í réttu hlutfalli við neikvæðan hraðastigul

Almennt um seigju

- Þessi líking er þekkt sem **seigjulögmál Newtons** og vökvar sem hlýta því eru sagðir **Newtonskir**
- Oft er hentugt að nota hlutfall seigju og eðlismassa sem nefnt er **eðlisseigja**

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

þar sem

$$\mu \quad [\mathrm{g\ cm^{-1}s^{-1}}]$$

er skriðseigja (e. dynamic viscosity)

$$\nu \quad [\mathrm{cm^2s^{-1}}]$$

er eðlisseigja (e. kinematic viscosity) og

$$\rho \quad [\mathrm{g\ cm^{-3}}]$$

er eðlismassi (e. mass density)

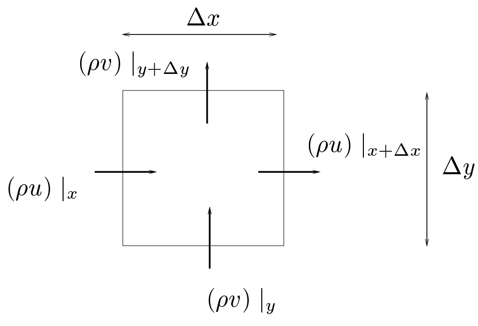
cgs einingin fyrir [g cm^{-1}s^{-1}] er kölluð [poise].

Mæling seigju

- Seigju olíu í glasi má mæla á einfaldan hátt með því að láta kúlur falla í gegnum olíuna og mæla fallhraðann, **falltilraun Stokes**.
- Hana má einnig mæla með snúningspendli, þar sem kefli í olíunni dempar sveifluna.
- Tilgangur tilraunarinnar er að kynnast seigju vökva og jöfnu Navier-Stoke með mælingum og tölulegum reikningum.

Varðveisla massa

$$\begin{pmatrix} \text{Uppsöfnun} \\ \text{massa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Massa-} \\ \text{flæði} \\ \text{inn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Massa-} \\ \text{flæði} \\ \text{út} \end{pmatrix}$$



Varðveisla massa

Við getum ritað þetta á forminu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right)$$

sem er ritað á vigurformi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \rho \mathbf{v})$$

þar sem $\nabla \rho \mathbf{v}$ er nefnt sundurleitni $\rho \mathbf{v}$.

Ef diffrunin er framkvæmd fæst

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

sem gjarnan er ritað á Lagrangian formi

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = -\rho(\nabla \mathbf{v})$$

Samfelldnijafnan fyrir ósamþjappanlegan vökva er

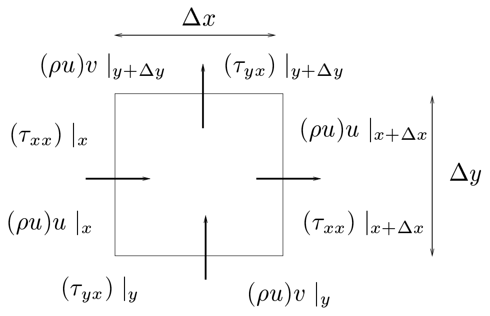
$$\rho(\nabla \mathbf{v}) = 0$$

Varðveisla skriðþunga

Skiðþunginn er varðveittur:

$$\begin{pmatrix} \text{Uppsöfnun} \\ \text{skriðþunga} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Kraftar} \\ \text{sem verka} \\ \text{á kerfið} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \text{Skriðþunga-} \\ \text{flæði} \\ \text{inn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Skriðþunga-} \\ \text{flæði} \\ \text{út} \end{pmatrix}$$



Varðveisla skriðþunga

Ef skoðuð er rúmmálseining

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = \Delta y (p_x - p_{x+\Delta x}) + \rho g_x \Delta x \Delta y$$

$$+\Delta y(\tau_{xx} |_x - \tau_{xx} |_{x+\Delta x}) + \Delta x(\tau_{yx} |_y - \tau_{yx} |_{y+\Delta y})$$

$$+\Delta y(\rho uu |_x - \rho uu |_{x+\Delta x}) + \Delta x(\rho uu |_y - \rho uu |_{y+\Delta y}$$

sem inniheldur

- Þrýstingskrafta í $x-$stefnu
- Þyngdarkrafta á rúmmálseininguna
- Sveim skriðþunga vegna skerkrafta inn- og út úr rúmmálseiningunni
- Straumburð (e. convection) skriðþunga inn og út úr rúmmálseiningunni

Varðveisla skriðþunga

Látum nú Δx og Δy stefna á núll, þá er jafnan fyrir varðveislu skriðþunga í $x-$stefnu

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) \right)$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) \right) + \rho g_x$$

og $y-$stefnu

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) \right)$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) \right) + \rho g_y$$

sem verður á vigurformi

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla p - [\nabla \rho \mathbf{v}\mathbf{v}] - [\nabla \cdot \tau] + \rho g$$

Varðveisla skriðþunga

Diffrum og notum samfelldni jöfnuna

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) + \rho g_x$$

sem er á vigurformi

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} - \nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho \mathbf{g}$$

Hreyfijafnan segir að lítil rúmmálseining, sem hreyfist með vökva, verður fyrir hröðun vegna krafta sem á hana verka

Þetta er annað lögmál Newtons

$$\text{massi} \times \text{hröðun} = \text{summa krafta}$$

Varðveisla skriðþunga

Gerum nú ráð fyrir Newtonskum vökva

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

svo að skriðþungajafnan verður

$$\rho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x +$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right.$$

Varðveisla skriðþunga

Fyrir ósamþjappanlegan vökva þar sem

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

og seigjan er fasti fæst

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$$

sem er jafna Navier-Stokes.

Í $x-$stefnu er jafna Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \rho g$$

Ef áhrif seigju eru óveruleg þá er

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$$

sem er jafna Eulers

Einingalaus framsetning

Skilgreinum einingalausar stærðir

$$v^* = \frac{v}{V} \quad p^* = \frac{p - p_o}{\rho V^2} \quad t^* = \frac{tV}{D}$$

$$x^* = \frac{x}{D} \quad y^* = \frac{y}{D} \quad z^* = \frac{z}{D}$$

og stingum inn í jöfnu Navier-Stokes í $x-$stefnu

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) =$$

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \left(\frac{\mu}{DV\rho}\right)\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (y^*)^2}\right) + \left(\frac{gD}{V^2}\right)\frac{g_x}{g}$$

Svo að myndaðar hafa verið einingarlausar stærðir

$$\mathrm{Re} = \frac{DV\rho}{\mu} \qquad \text{Reynoldstala}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{V^2}{gD} \qquad \text{Froude-tala}$$

Einingalaus framsetning

Reynoldstala

$$\mathrm{Re} = \frac{DV\rho}{\mu} = \frac{\rho V^2}{\mu V/D} = \frac{\text{tregðukraftar}}{\text{seigjukraftar}}$$

Froude-tala

$$\mathrm{Fr} = \frac{V^2}{gD} = \frac{\rho V^2}{\rho g D} = \frac{\text{tregðukraftar}}{\text{þyngdarkraftar}}$$

Mæling seigju með aðferð Stokes

- Gerum nú ráð fyrir stöðugu streymi um kúlu í ósamþjappanlegum vökva
- Þegar kúlan hreyfist með jöfnum hraða í gegnum vökvann eru það þrír þættir sem áhrif hafa á hreyfinguna
  - skriðseigja vökvans, μ,
  - hraði kúlunnar u
  - stærð kúlunnar, l
- Út frá þessum stærðum finnum við Reynoldstöluna

$$\mathrm{Re} = \frac{DV\rho}{\mu}$$

- Stöðugt flæði svarar til þess að $\partial v/\partial t = 0$. Sýna má að $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} \approx u^2/l$ í Navier - Stokes jöfnunni í grennd við hlutinn og að seigjuliðurinn sé $(\mu/\rho)\nabla^2\mathbf{v} \approx \nu u/l^2$.

Mæling seigju með aðferð Stokes

- Reynoldstalan er einingalaus stærð sem segir til um stöðugleikann í flæðinu og hvenær flæðið byrjar að vera iðustreymandi
- Ef Re $\ll 1$ er liðnurinn $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ óvera
- Í þeim lið tilraunarinnar þar sem kúlur eru látnar falla hægt í vökva sem er mun seigari en vatn má ætla að Re $\sim 10^{-3} - 10^{-2}$ þannig að jafnan verður línuleg hlutafleiðujafna sem leyst er með tilheyrandi randskilyrðum fyrir kúlu og við höfum **skriðflæði** (e. creeping flow).
- Þessi jafna er einfaldlega

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p = 0$$

- Hraðadreifingin hefur randskilyrðin $v_r = v_\theta = 0$ við yfirborð kúlunnar

Mæling seigju með aðferð Stokes

- Jafnan er leyst til að finna hraðadreifinguna og þar með kraftana sem á kúluna verka
- Viðnámskrafturinn sem út úr þessari jöfnu fæst er gefinn með [1, 2]

$$\mathbf{F}_d = -6\pi\eta a u \hat{\mathbf{u}}$$

sem er lögmál Stokes.

- Í meiri fjarlægð frá kúlunni er liðurinn tekinn með nálgun og gefur þá lausn jöfnunnar

$$\mathbf{F}_d = -6\pi\eta a u \left(1 + \frac{3}{8}\mathrm{Re}\right) \hat{\mathbf{u}}$$

- Einnig ber að hafa í huga að jafna þessi gildir ef vökvinn er endalaus. Í raun er það ekki tilfellið svo að leiðrétta verður fyrir þessi áhrif. Taka verður inn þvermál glassins sem kúlan fellur í. Þetta gefur kraftinn

$$\mathbf{F}_d = -6\pi\eta a u \left(1 + \frac{3}{8}\mathrm{Re}\right)\left(1 + \frac{2\pi a}{3D}\right) \hat{\mathbf{u}}$$

Mæling seigju með aðferð Stokes

- Summa kraftanna sem á kúluna verkar er núll eða

$$F_{\text{þyngdar}} + F_{\text{uppdrif}} + F_{\text{viðnám}} = 0$$

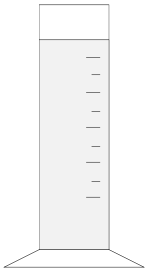
- Þessa staðreynd má síðan nota til að finna eðlisseigju vökvans, ef hraðinn er þekktur

$$\mu = \frac{2ga^2(\rho_{\text{kúla}} - \rho_{\text{olía}})}{9u\left(1 + \frac{2\pi a}{3D}\right)} - \frac{3}{4} a u \rho_{\text{olía}}$$

þar sem a er radíi kúlu og u er hraði hennar.

Mæling seigju með aðferð Stokes

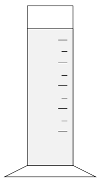
Framkvæmd tilraunar



- Olíunni er komið fyrir í 2000 ml mæliglasi af gerðinni Pyrex B.S.604.
- Mældur er fallhraði lítilla málm- og glerkúlna með þekkt þvermál og eðlismassa. Hraðinn er ákvarðaður með því að mæla tímann sem það tekur kúlurnar að falla tiltekna vegalengd.

Mæling seigju með aðferð Stokes

Framkvæmd tilraunar



1. Mælið eðlismassa olíunnar
2. Finnið eðlismassa og radía kúlna
3. Leiðið út jöfnu fyrir seigju olíu sem fall af fallhraða kúlna
4. Mælið fallhraða kúlna í olíunni, hver er Reynoldstalan ? Er nálgunin réttlætanleg ?
5. Reiknið seigju olíunnar

Mæling seigju með snúningspendli

- Skoðum nú hina þrjá þætti Navier - Stokes jöfnunnar í sívalningshnitum. Viljum finna v_ϕ.
- Gerum nú ráð fyrir að $v_r = v_z = 0$ og $\partial/\partial\phi = 0$ þar eð ekki eru hringstraumar.
- Fyrir langt kefli er $\partial/\partial z = 0$. Þegar þetta er sett inn stendur eftir ein jafna

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r^2}\right)$$

og einnig með innsetningu á $u = rv_\phi$ fæst

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

og þá er

$$\sigma_{r\phi} = \mu\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r}\right) = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2}\right)$$

Mæling seigju með snúningspendli

Almennt er dempuðum snúningspendli lýst með jöfnunni

$$I\ddot{\phi} = -k\phi + \tau(\eta, \phi) = -k\phi - b\dot{\phi}$$

þar sem I er hverfitregða keflis og skífu, k er vægisstuðull vírsins og $\tau(\eta, \phi)$ er dempunarliður sem stafar af seigju. Lausn þessarar jöfnu fyrir ódempað kefli hefur horntíðni

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{k}{I}\right)^{1/2}$$

og þegar dempun

$$\gamma = \frac{b}{2I}$$

er tekin með er sveiflutíminn

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \left(\omega^2 - \gamma^2\right)^{1/2}$$

Mæling seigju með snúningspendli

Þetta skapar þrjú tilfelli lausna:

- Undirdempuð sveifla $\omega^2 - \gamma^2 < 0$ með lausn

$$\phi(t) = A\exp(-\gamma t)\cos\omega_0 t$$

- Markdempuð sveifla $\omega^2 - \gamma^2 = 0$ með lausn

$$\phi(t) = A\exp(-\gamma t) + B\exp(-\gamma t)$$

- Yfirdempuð sveifla $\omega^2 - \gamma^2 > 0$ með lausn

$$\phi(t) = A\exp(-(\gamma + \omega_0)t)$$

Undirdempaða sveiflu viljum við skoða nánar með mælingum.

Mæling seigju með snúningspendli

Vægisstuðull vírsins, k, er fengin með því að ákveða sveiflutíma fyrir þekktar hverfitregður. Með því að finna mismun hverfitregða tveggja kefla má síðan reikna k, Þannig fæst

$$k = 4\pi^2 \frac{I_1 - I_2}{T_1^2 - T_2^2}$$

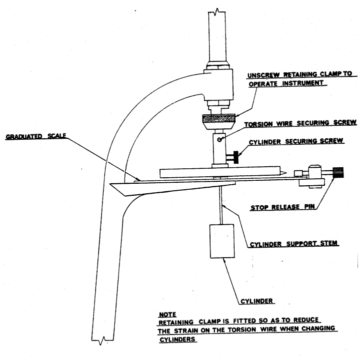
Hverfitregða pendúls nr. i er þá rituð

$$I_0 + I_i = k \left(\frac{\tau_i}{2\pi} \right)$$

þar sem $i = 1, 2, 3$.

Mæling seigju með snúningspendli

- Snúningspendúll sá er notaður er við mælinguna er í raun vír sem í er fest kasthjól.
- Í kasthjólið er síðan festur vísirinn sem bendir á sveifluhorn það sem sýnir snúning pendúls.
- Neðan í vírinn má síðan hengja sívalninga eða kefli af nokkrum mismunandi stærðum og þyngdum.



Mæling seigju með snúningspendli

- Við mælingu á seigju eru kefli látin snúst í bikar sem í er olía.
- Til að ákvarða vægisstuðul vírsins var fyrst mælt með tveimur mismundi sívalningum án þess að olía væri til að dempa sveifluna. Þekkt er að hverfitregða gegnheils sívalnings er $I = (1/2)MR^2$.
- Til að fá réttan massa á sívalning þarf að draga frá massa stangar sem við hann er fest.

1. Komið kefli fyrir í olíunni
2. Snúið keflinu um -360°, sleppið og mælið útslag fyrstu sveiflunnar
3. Lesið eðlisseigju af grafi frá framleiðanda tækis og reiknið seigju olíunnar
4. Endurtakið fyrir samtals þrjú mismunandi kefli
5. Ákvarðið vægistuðul vírsins (notast í tölulegum reikningum)

Heimildir

[1] L.D. Landau and E.M. Liftshiftz, *Fluid Mechanics*, 2nd edition, Pergamon Press, 1987

[2] R. B. Bird, W. E. Stewart and E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena* , John Wiley & Sons, 1960

[3] Auglýsingabæklingur frá Skeljungi h.f.