Verkleg eðlisfræði:

Seigja vökva

Tilraun 2

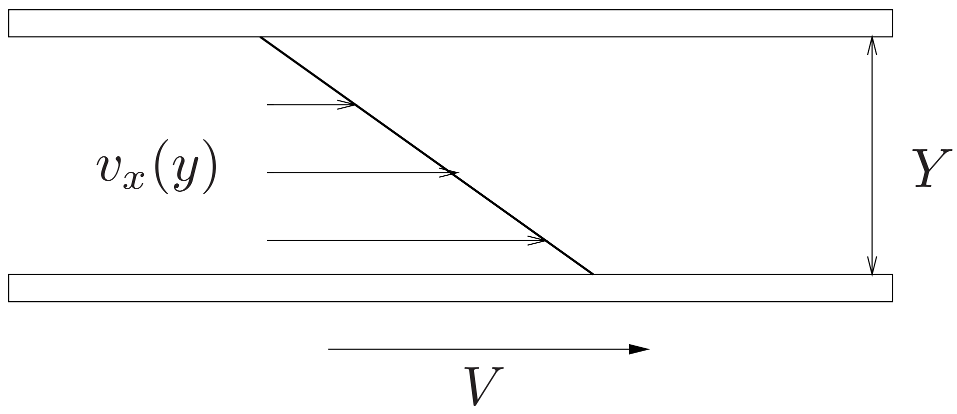
Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

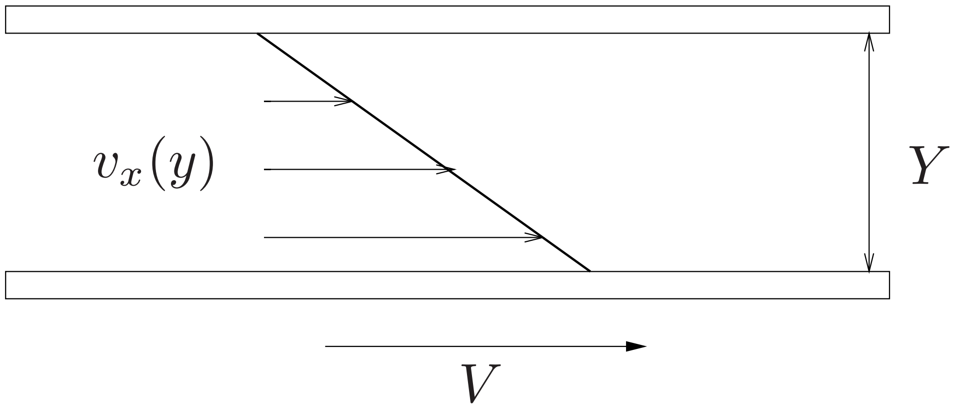
18. janúar 2018

Almennt um seigju

- Sá eðliseiginleiki sem er einkennandi fyrir rennslisviðnám einfaldra vökva er nefndur **seigja**
- Gerum ráð fyrir vökva sem situr á milli tveggja stórra samsíða platna sem hafa yfirborðsflatarmál A og aðskilnað Y
- Gerum ráð fyrir að kerfið sé upphaflega í kyrrstöðu við tímann $t = 0$
- Við $t = 0$ er neðri platan sett á hreyfingu með fastann hraða V



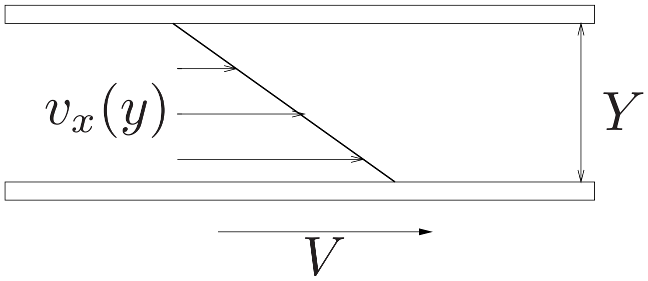
Almennt um seigju



- Í fyllingu tímans verður hraðadreifingin í vökvanum eins og myndin sýnir
- Þegar þessu æstæða ástandi hefur verið náð þarf fastan kraft F til að viðhalda hreyfingu neðri plötunnar

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y}$$

Almennt um seigju



- Það er krafturinn á einingarflatarmál er í réttu hlutfalli við hraðaminnkunina yfir fjarlægðina Y
- Þetta má rita sem
$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}$$
sem segir að **skerkraftur** á einingarflöt sé í réttu hlutfalli við neikvæðan hraðastigul
- Þessi líking er þekkt sem **seigjulögmál Newtons** og vökvar sem hlýta því eru sagðir **Newtonskir**

Almennt um seigju

- Oft er hentugt að nota hlutfall seigju og eðlismassa sem nefnt er **eðlisseigja**

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

þar sem

$$\mu \;\; [\mathrm{g\ cm^{-1}s^{-1}}]$$

er skriðseigja (e. dynamic viscosity)

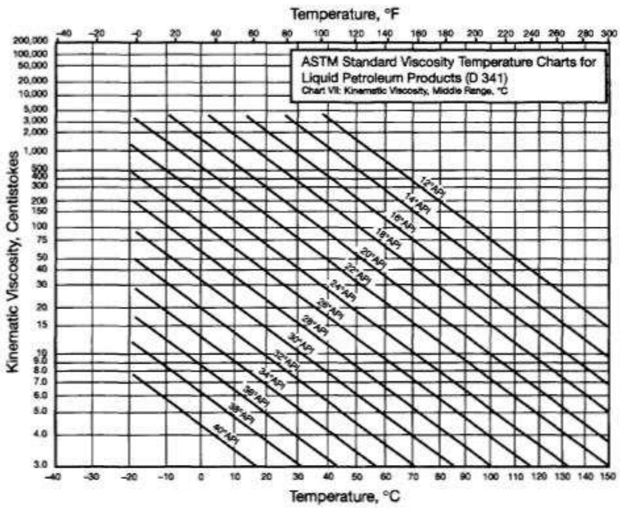
$$\nu \;\; [\mathrm{cm^2 s^{-1}}]$$

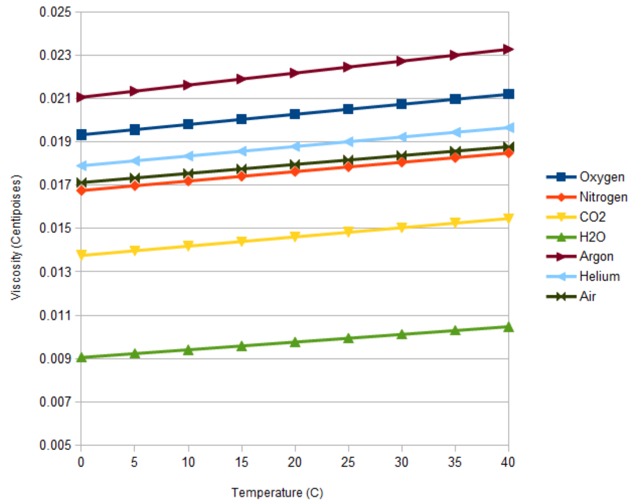
er eðlisseigja (e. kinematic viscosity) og

$$\rho \;\; [\mathrm{g\ cm^{-3}}]$$

er eðlismassi (e. mass density)

Almennt um seigju





- cgs einingin fyrir [g $\text{cm}^{-1}\text{s}^{-1}$] er kölluð [poise].
- Seigja gasa eykst með auknu hitastigi
- Seigja vökva fellur með auknu hitastigi

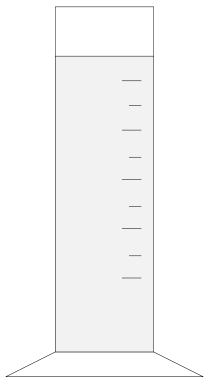
Almennt um seigju

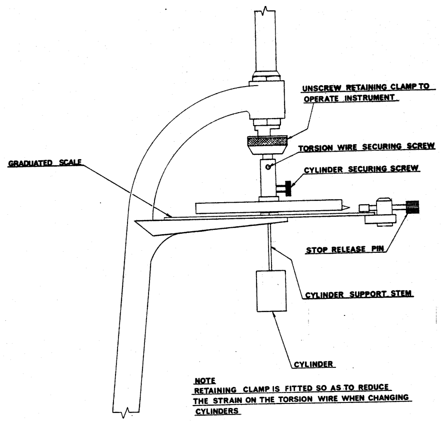
Dæmigerð gildi á seigju við stofuhita (gös við 1 atm):

	Skriðseigja	Eðlisseigja
	μ [cp]	$\nu \times 10^2$ [cm^2/s]
andrúmsloft	0.01813	15.05
vatn	1.0019	1.0037
motorolía	800	
glycerol	107	
O_2	0.0203	
CO_2	0.0146	

Mæling seigju

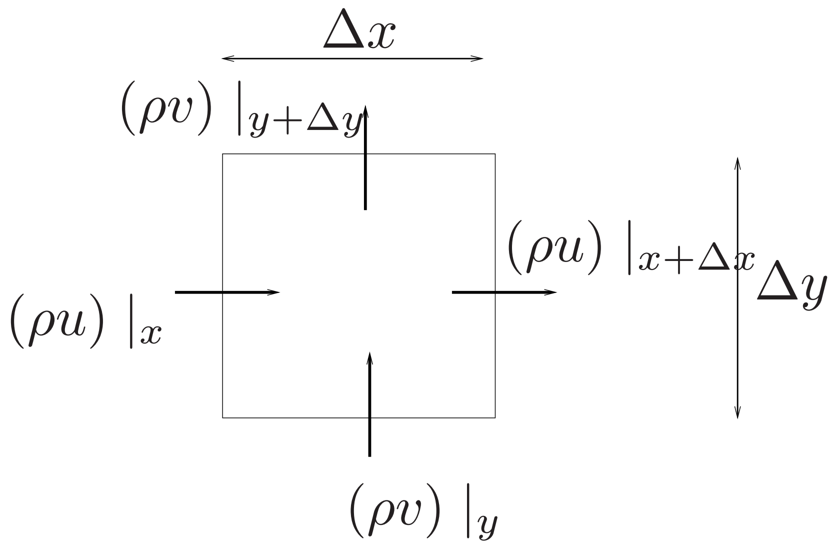
- Seigju olíu í glasi má mæla á einfaldan hátt með því að láta kúlur falla í gegnum olíuna og mæla fallhraðann, **falltilraun Stokes**.
- Hana má einnig mæla með snúningspendli, þar sem kefli í olíunni dempar sveifluna.
- Tilgangur tilraunarinnar er að kynnast seigju vökva og jöfnu Navier-Stoke með mælingum og tölulegum reikningum.





Varðveisla massa

$$\begin{pmatrix} \text{Uppsöfnun} \\ \text{massa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Massa-} \\ \text{flæði} \\ \text{inn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Massa-} \\ \text{flæði} \\ \text{út} \end{pmatrix}$$



Varðveisla massa

$$\begin{pmatrix} \text{Uppsöfnun} \\ \text{massa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Massa-} \\ \text{flæði} \\ \text{inn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Massa-} \\ \text{flæði} \\ \text{út} \end{pmatrix}$$

- Við getum ritað þetta á forminu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right)$$

sem er ritað á vigurformi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

þar sem $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ er nefnt sundurleitni $\rho \mathbf{v}$.

Varðveisla massa

- Ef diffrunin er framkvæmd fæst

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

sem gjarnan er ritað á Lagrangian formi

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

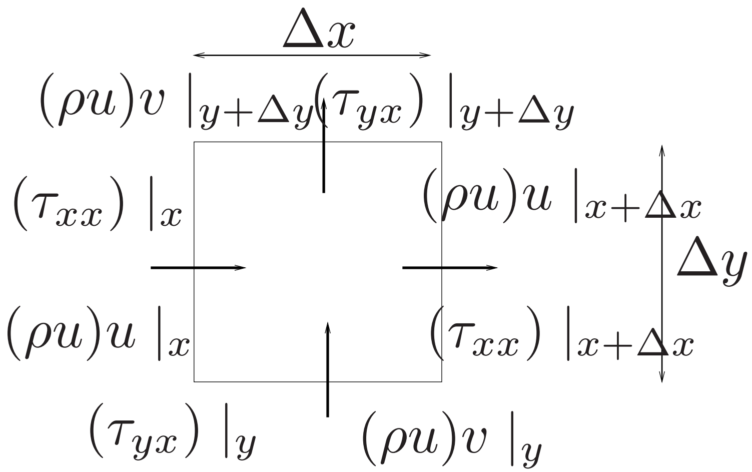
Samfelldnijafnan fyrir ósamþjappanlegan vökva er

$$\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

Varðveisla skriðþunga

Skiðþunginn er varðveittur:

$$\begin{pmatrix}\text{Uppsöfnun}\\ \text{skriðþunga}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Kraftar}\\ \text{sem verka}\\ \text{á kerfið}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Skrið-}\\ \text{þungi}\\ \text{inn}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Skrið-}\\ \text{þungi}\\ \text{út}\end{pmatrix}$$



Varðveisla skriðþunga

- Ef skoðuð er rúmmálseining

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = \Delta y(p\mid_x - p\mid_{x+\Delta x}) + \rho g_x \Delta x \Delta y$$

$$+\Delta y(\tau_{xx}\mid_x - \tau_{xx}\mid_{x+\Delta x}) + \Delta x(\tau_{yx}\mid_y - \tau_{yx}\mid_{y+\Delta y})$$

$$+\Delta y(\rho uu\mid_x - \rho uu\mid_{x+\Delta x}) + \Delta x(\rho uu\mid_y - \rho uu\mid_{y+\Delta y})$$

  sem inniheldur

  – Þrýstingskrafta í $x-$stefnu
  – Þyngdarkrafta á rúmmálseininguna
  – Sveim skriðþunga vegna skerkrafta inn- og út úr rúmmálseiningunni
  – Straumburð (e. convection) skriðþunga inn og út úr rúmmálseiningunni

Varðveisla skriðþunga

- Látum nú Δx og Δy stefna á núll, þá er jafnan fyrir varðveislu skriðþunga í $x-$stefnu

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) \right) + \rho g_x$$

og $y-$stefnu

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) \right) + \rho g_y$$

sem verður á vigurformi

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla p - [\nabla \cdot \rho \mathbf{v}\mathbf{v}] - [\nabla \cdot \tau] + \rho \mathbf{g}$$

Varðveisla skriðþunga

- Diffrum og notum samfelldni jöfnuna

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=-\frac{\partial p}{\partial x}-\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)+\rho g_x$$

sem er á vigurformi

$$\rho\frac{\mathbf{Dv}}{\mathrm{D}t}=-\nabla p-[\nabla\cdot\tau]+\rho\mathbf{g}$$

- Hreyfijafnan segir að lítil rúmmálseining, sem hreyfist með vökva, verður fyrir hröðun vegna krafta sem á hana verka

- Þetta er annað lögmál Newtons

$$\text{massi}\times\text{hröðun}=\text{summa krafta}$$

Varðveisla skriðþunga

- Gerum nú ráð fyrir Newtonskum vökva

$$\tau_{xx} = -2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})$$

$$\tau_{yy} = -2\mu\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

svo að skriðþungajafnan verður

$$\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)\right]$$

Varðveisla skriðþunga

- Fyrir ósamþjappanlegan vökva þar sem

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

og seigjan er fasti fæst

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$$

sem er jafna Navier-Stokes.

Varðveisla skriðþunga

- Í $x-$stefnu er jafna Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\rho g$$

- Ef áhrif seigju eru óveruleg þá er

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t}=-\nabla p+\rho\mathbf{g}$$

sem er jafna Eulers

Einingalaus framsetning

- Skilgreinum einingalausar stærðir

$$v^* = \frac{v}{V} \quad p^* = \frac{p - p_o}{\rho V^2} \quad t^* = \frac{tV}{D}$$

$$x^* = \frac{x}{D} \quad y^* = \frac{y}{D} \quad z^* = \frac{z}{D}$$

og stingum inn í jöfnu Navier-Stokes í $x-$stefnu

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) =$$

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \left(\frac{\mu}{DV\rho}\right)\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) + \left(\frac{gD}{V^2}\right)\frac{g_x}{g}$$

Einingalaus framsetning

- Þetta má rita

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) + \frac{1}{\mathrm{Fr}} \frac{g_x}{g}$$

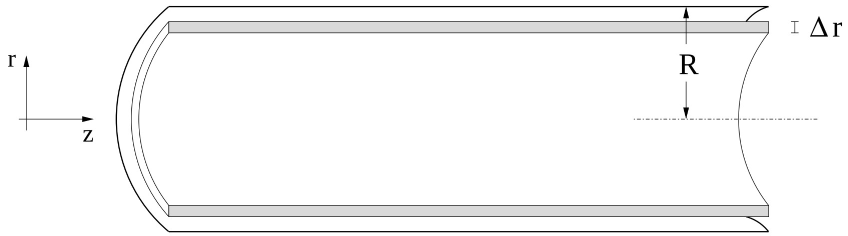
- Svo að myndaðar hafa verið einingalausar stærðir
- Reynoldstala

$$\mathrm{Re} = \frac{DV\rho}{\mu} = \frac{\rho V^2}{\mu V/D} = \frac{\text{tregðukraftar}}{\text{seigjukraftar}}$$

- Froude-tala

$$\mathrm{Fr} = \frac{V^2}{gD} = \frac{\rho V^2}{\rho g D} = \frac{\text{tregðukraftar}}{\text{þyngdarkraftar}}$$

Flæði um rör



- Jöfnur fyrir lagskipt flæði í röri eru leiddar út útfrá skriðþungajafnvægi
- Hér eru notuð sívalningshnit
- Gert er ráð fyrir lagskiptu flæði í röri af lengd L og radía R
- Gert er ráð fyrir að rörið sé mjög langt og að áhrif enda séu óveruleg
- Við skoðum sívala skel af þykkt Δr og lengd L og metum framlag til skriðþunga í $z-$stefnu eftir rörinu

Flæði um rör

- Skriðþungaflæði um sívallt yfirborð við r

$$2\pi r L \tau_{rz}\mid_r$$

- Skriðþungaflæði um sívallt yfirborð við $r + \Delta r$

$$2\pi r L \tau_{rz}\mid_{r+\Delta r}$$

- Skriðþungaflæði um hringlaga yfirborð við $z = 0$

$$2\pi r \Delta r v_z(\rho v_z) L\mid_{z=0}$$

- Skriðþungaflæði um hringlaga yfirborð við $z = L$

$$2\pi r \Delta r v_z(\rho v_z) L\mid_{z=L}$$

Flæði um rör

- Þyngdarkraftur sem verkar á sívala skel

$$(2\pi r \Delta r L)\rho g \,|_r$$

- Þrýstikraftur á hringlaga flöt við $z = 0$

$$(2\pi r \Delta r)p_0 \,|_{z=0}$$

- Þrýstikraftur á hringlaga flöt við $z = L$

$$(2\pi r \Delta r)p_L \,|_{z=L}$$

Flæði um rör

- Sé þetta lagt saman fæst skriðþungajafnvægi

$$2\pi r L \tau_{rz} \mid_r - 2\pi r L \tau_{rz} \mid_{r+\Delta r} + (2\pi r \Delta r) p_0 \mid_{z=0} - (2\pi r \Delta r) p_L \mid_{z=L} +$$

$$2\pi r \Delta r v_z (\rho v_z) L \mid_{z=0} - 2\pi r \Delta r v_z (\rho v_z) L \mid_{z=L} + (2\pi r \Delta r L) \rho g \mid_r = 0$$

- Þar sem vökvinn er ósamþjappanlegur er hraðinn v_z hinn sami við $z = 0$ og $z = L$ og skriðþungaflæðið um hringlaga yfirborðið styttist út

- Deilum með $2\pi L \Delta r$ og laum Δr stefna á núll

$$\lim_{\Delta r \to 0} \left(\frac{(r\tau_{rz}) \mid_{r+\Delta r} - (r\tau_{rz}) \mid_r}{\Delta r} \right) = \left(\frac{p_0 - p_{\mathrm{L}}}{L} + \rho g \right) r$$

Flæði um rör

- Þannig að

$$\frac{d}{dr}\left(r\tau_{rz}\right) = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_\mathrm{L}}{L}\right) r$$

  þar sem $\mathcal{P} = p - \rho g z$

- Jöfnuna má tegra

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_\mathrm{L}}{2L}\right) r + \frac{C_1}{r}$$

- Fastinn C_1 verður að vera núll ef flæðið á ekki að verða óendnanlegt við $r = 0$

- Skriðþungadreifingin er því

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_\mathrm{L}}{2L}\right) r$$

Flæði um rör

- Samkvæmt lögmáli Newton er

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$$

  þannig að

$$\frac{dv_z}{dr} = -\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_\mathrm{L}}{2\mu L}\right) r$$

- Tegrun gefur

$$v_z = -\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_\mathrm{L}}{4\mu L}\right) r^2 + C_2$$

- Randskilyrðið $v_z = 0$ við $r = R$ gefur að

$$C_2 = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_\mathrm{L}}{4\mu L}\right) R^2$$

Flæði um rör

- Hraðadreifingin er

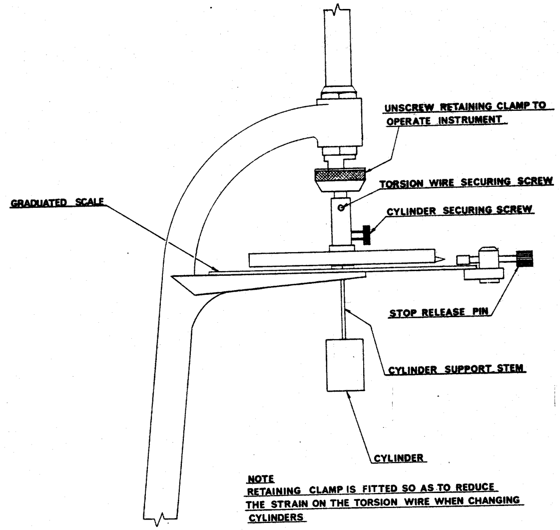
$$v_z = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_{\mathrm{L}}}{4\mu L} \right) R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

- Sem sagt, hraðadreifing lagskipts, ósamþjappanlegs flæðis í röri er lýst með fleygboga
- Flæðið Q er margfeldi þverskurðarflatarmáls og meðalhraða

$$Q = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_{\mathrm{L}}}{8\mu L} \right) \pi R^4$$

  sem er nefnt lögmál Hagen-Poiseuille
- Það gildir ef flæðið er lagskipt eða $\mathrm{Re} < 2100$ og vökvinn er Newtonskur

Mæling seigju



- Aðferðir til að mæla seigju
  - Falltilraun Stokes
  - Mæling seigju með snúningspendli

Falltilraun Stokes

- Gerum nú ráð fyrir stöðugu streymi um kúlu í ósamþjappanlegum vökva
- Þegar kúlan hreyfist með jöfnum hraða í gegnum vökvann eru það þrír þættir sem áhrif hafa á hreyfinguna
  - skriðseigja vökvans, μ
  - hraði kúlunnar, u
  - stærð kúlunnar, a
- Út frá þessum stærðum finnum við Reynoldstöluna

$$\mathrm{Re} = \frac{au\rho}{\mu}$$

Falltilraun Stokes

- Stöðugt flæði svarar til þess að $\partial v/\partial t = 0$. Sýna má að $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \approx v^2/a$ í Navier - Stokes jöfnunni í grennd við hlutinn og að seigjuliðurinn sé $(\mu/\rho)\nabla^2\mathbf{v} \approx \nu v/a^2$.
- Reynoldstalan er einingalaus stærð sem segir til um stöðugleikann í flæðinu og hvenær flæðið byrjar að vera iðustreymandi
- Ef Re $\ll 1$ er liðurinn $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ óvera
- Í þeim lið tilraunarinnar þar sem kúlur eru látnar falla hægt í vökva sem er mun seigari en vatn má ætla að Re $\sim 10^{-3} - 10^{-2}$ þannig að jafnan verður línuleg hlutafleiðujafna sem leyst er með tilheyrandi randskilyrðum fyrir kúlu og við höfum **skriðflæði** (e. creeping flow).

Falltilraun Stokes

- Jafna Navier-Stokes er einfaldlega

$$\mu\nabla^2\mathbf{v} - \nabla p = 0$$

- Hraðadreifingin hefur randskilyrðin $v_r = v_\theta = 0$ við yfirborð kúlunnar
- Einföld leið til að mæla seigju vökva er að sleppa kúlu í gegnsætt rör sem inniheldur vökvann
- Ef rétt er staðið að nær kúlan tilteknum lokahraða u_∞
- Með því að ákvarða þennan lokahraða má ákvarða seigju vökvans

Falltilraun Stokes

- Jafnan

$$\mu\nabla^2\mathbf{v} - \nabla p = 0$$

  er leyst til að finna hraðadreifinguna og þar með kraftana sem á kúluna verka

- Gerum ráð fyrir kúlu at radía $r = a$ og innleiðum kúluhnit
- Seigur og ósamþjappanlegur vökvi umhverfis kúlu hefur eingöngu radíal og pólhornháða hraðaþætti
- Sú staðreynd að sundurleitni þessa hraðasviðs er núll leyfir það að innleitt sé straumfallið $\psi(r, \theta)$ sem er skilgreint með

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad \text{og} \quad v_\theta = \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Falltilraun Stokes

- Notum þá staðreynd að

$$\nabla^2 \mathbf{v} \approx \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$$

fyrir ósamþjappanlegan vökva þá má rita ofangreindar jöfnur

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial (Q\psi)}{\partial \theta} \quad \text{og} \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{\mu}{\sin\theta} \frac{\partial (Q\psi)}{\partial r}$$

þar sem Q er diffurvirki skilgreindur með

$$Q = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right]$$

Falltilraun Stokes

- Ef við nú eyðum p út úr þessum tveimur skriðþungajöfnum fæst fjórða gráðu hlutafleiðujafna
$$Q^2\psi = 0$$
- Framkvæmum innsetningu
$$\psi = f(r)\sin^2\theta$$
sem gefur fjórðu gráðu diffurjöfnu af Euler gerð
$$r^4 f'''' - 4r^2 f'' + 8r f' - 8f = 0$$
- Þessu næst stingum við inn $f = r^k$ sem gefur fjórðu gráðu margliðu í k sem hefur rætur $k = -1, 1, 2$ og 4

Falltilraun Stokes

- Almenn lausn fyrir f er

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4$$

- Finna má fastana fjóra A, B, C og D með því að nota það að báðir hraðaþættirnir verða núll við yfirborð kúlunnar $r = a$ og að $v_r \propto u_\infty \cos\theta$ þegar r er stórt

- Þetta leiðir til straumfallsins fyrir Stokes flæði

$$\psi(r,\theta) = u_\infty \left[\frac{a^3}{4r} - \frac{3ar}{4} + \frac{r^2}{2} \right] \sin^2\theta$$

Falltilraun Stokes

- Þar með er hægt að rita hraðaþættina

$$v_r = u_\infty \left[\frac{a^3}{2r^3} - \frac{3a}{2r} + 1 \right] \cos\theta$$

og

$$v_\theta = u_\infty \left[\frac{a^3}{4r^3} + \frac{3a}{4r} - 1 \right] \sin\theta$$

og radíal þrýstingsstigull er

$$p = -\left[\frac{3a\mu u_\infty}{2r^2} \right] \cos\theta$$

- Viðnámskraftinn má síðan finna með því að tegra skerkraftinn og þrýstingskraftinn yfir allt yfirborð kúlunnar

Falltilraun Stokes

- Skerkrafturinn á einingaflöt er nú gefinn með

$$\tau_{r\theta} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right]$$

- Tegrun yfir þrýstingsliðinn gefur

$$F_{\text{pressure}} = 2\pi a^2 \int_0^\pi p \sin\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta = 2\pi a \mu u_\infty$$

og yfir skerkraftinn gefur seigjukraftinn

$$F_{\text{shear}} = 2\pi a^2 \int_0^\pi \tau_{r\theta} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = 4\pi a \mu u_\infty$$

Falltilraun Stokes

- Þannig að heildar viðnámskrafturinn er gefinn með (1; 2; 3)

$$F_{\mathrm{k}} = 6\pi\mu a u_\infty$$

  sem er **lögmál Stokes** (5)

- Oft eru kraftar sem verka á hlut sem hreyfist í vökva sýndir með einingarlausri stærð sem er fundin með því að deila í kraftinn með $\frac{1}{2}\rho u_\infty^2$ og flatarmáli hlutarins þegar honum er varpað á plan sem er normall á u_∞, þetta er dragakraftstuðullinn

$$C_{\mathrm{D}} = \frac{F_{\mathrm{k}}}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \pi a^2} = \frac{24}{\mathrm{Re}}$$

Falltilraun Stokes

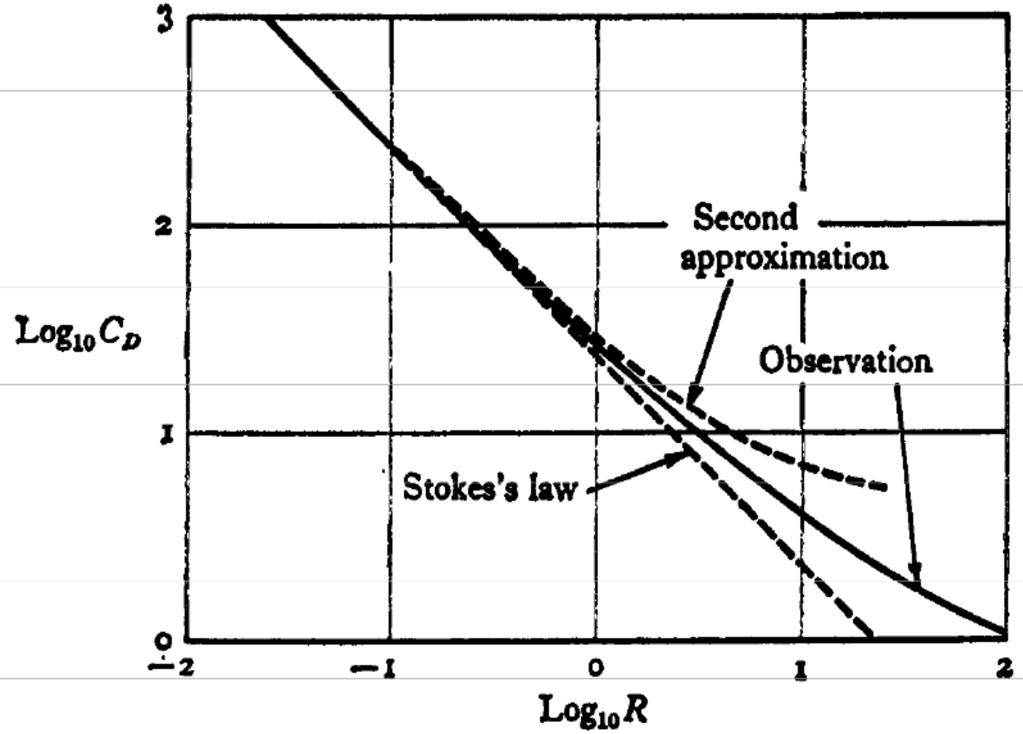


Figure 4.9.2. Comparison of measured values of the drag on a sphere (taken from Castleman 1925) and two theoretical estimates, Stokes's law $C_D = 24/R$, and a second approximation $C_D = 24R^{-1}(1 + \frac{3}{16}R)$, where $R = 2a\rho U/\mu$.

Falltilraun Stokes

- Summa þyngdar og uppdrifskraftsins er

$$F_{\mathrm{s}} = \frac{4}{3}\pi a^3 g(\rho_{\text{kúla}} - \rho_{\text{olía}})$$

- Summa kraftanna sem á kúluna verkar er núll eða

$$F_{\text{þyngdar}} + F_{\text{uppdrif}} + F_{\text{viðnám}} = 0$$

- Þessa staðreynd má síðan nota til að finna eðlisseigju vökvans, ef hraðinn er þekktur

$$\mu = \frac{2ga^2(\rho_{\text{kúla}} - \rho_{\text{olía}})}{9u_\infty}$$

þar sem a er radíi kúlu, D er innra þvermál bikars og u_∞ er lokahraði kúlu.

Falltilraun Stokes

- Viðnámskraftinn þarf að leiðrétta fyrir áhrifum tregðukrafta (3)

$$F_\mathrm{k} = 6\pi\mu a u_\infty \left[1 + \frac{3}{16}\mathrm{Re} - \frac{19}{1280}\mathrm{Re}^2 + \frac{71}{20480}\mathrm{Re}^3 + \ldots\right]$$

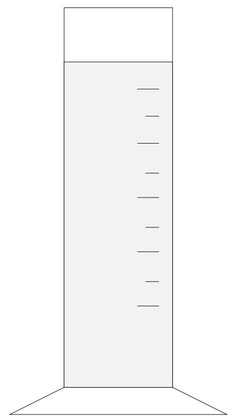
- Til að taka tillit til áhrifa veggjar sívalningssins þarf að leiðrétta með Faxén og Ladenburg liðnum (4)

$$\mu_0 = \mu \left\{1 - \left[2.104\left(\frac{a}{D}\right) \; - 2.09\left(\frac{a}{D}\right)^3 + 0.95\left(\frac{a}{D}\right)^5\right]\right\}$$

Ef $a/D < 0.01$ er leiðréttingin óveruleg

Falltilraun Stokes

Framkvæmd tilraunar



- Olíunni er komið fyrir í 2000 ml mæliglasi af gerðinni Pyrex B.S.604.
- Mældur er fallhraði lítilla málm- og glerkúlna með þekkt þvermál og eðlismassa. Hraðinn er ákvarðaður með því að mæla tímann sem það tekur kúlurnar að falla tiltekna vegalengd.

Falltilraun Stokes

Framkvæmd tilraunar

1. Mælið eðlismassa olíunnar
2. Finnið eðlismassa og radía kúlna
3. Leiðið út jöfnu fyrir seigju olíu sem fall af fallhraða kúlna
4. Mælið fallhraða kúlna í olíunni, hver er Reynoldstalan ? Er nálgunin réttlætanleg ?
5. Reiknið seigju olíunnar
6. Skipta tregðukraftar máli eða skiptir Faxén og Ladenburg liðurinn máli ?

Mæling seigju með snúningspendli

- Skoðum nú hina þrjá þætti Navier - Stokes jöfnunnar í sívalningshnitum. Viljum finna v_ϕ.
- Gerum nú ráð fyrir að $v_r = v_z = 0$ og $\partial/\partial\phi = 0$ þar eð ekki eru hringstraumar.
- Fyrir langt kefli er $\partial/\partial z = 0$. Þegar þetta er sett inn stendur eftir ein jafna
$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r^2}\right)$$
og einnig með innsetningu á $u = rv_\phi$ fæst
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

Mæling seigju með snúningspendli

- með spennuþinilinn

$$\sigma_{r\phi} = \mu \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} \right)$$

- Almennt er dempuðum snúningspendli lýst með jöfnunni

$$I\ddot{\phi} = -k\phi + \tau(\mu, \dot{\phi}) = -k\phi - b\dot{\phi}$$

þar sem I er hverfitregða keflis og skífu, k er vægisstuðull vírsins og $\tau(\mu, \dot{\phi})$ er dempunarliður sem stafar af seigju.

- Lausn þessarar jöfnu fyrir ódempað kefli hefur horntíðni

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{k}{I} \right)^{1/2}$$

Mæling seigju með snúningspendli

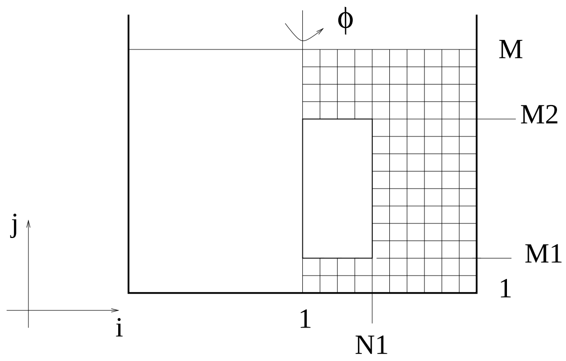
- Þegar dempun

$$\gamma = \frac{b}{2I}$$

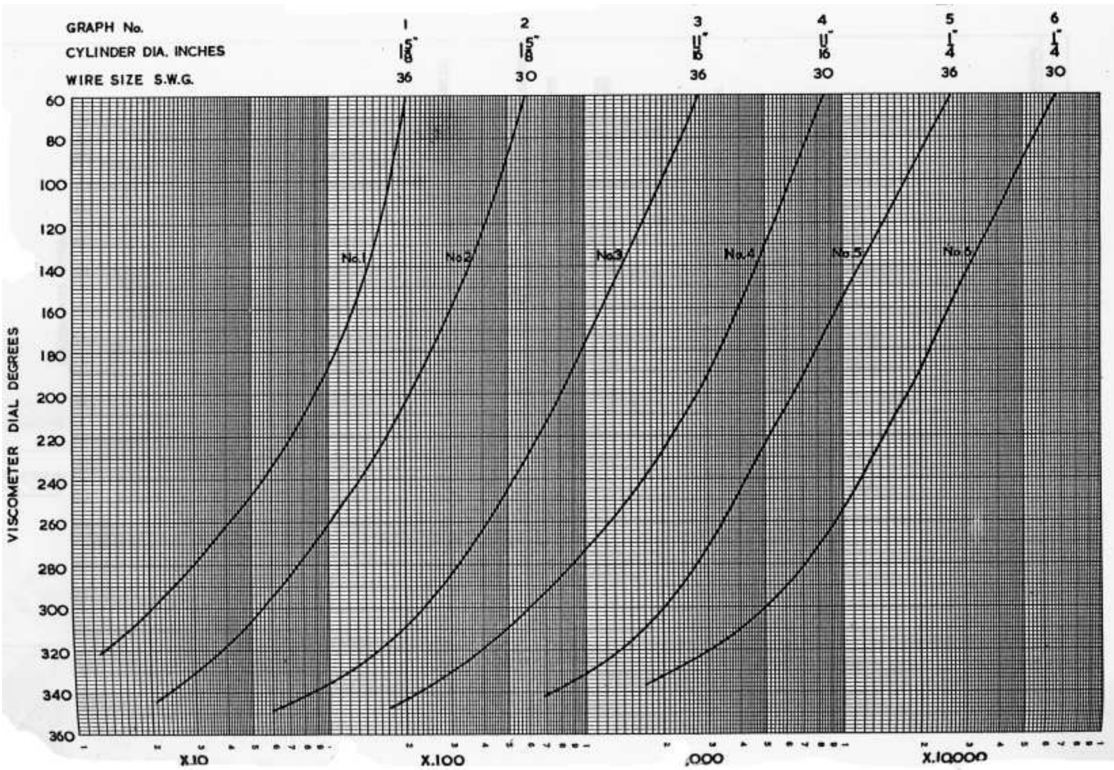
er tekin með er sveiflutíminn

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \left(\omega^2 - \gamma^2\right)^{1/2}$$

- Þessar jöfnur þarf að leysa tölulega og er hentugt að gera það í tvívíðu neti



Mæling seigju með snúningspendli



- Útslag snúningspendils sem fall af seigju í cPoise fyrir nokkur mismunadi kefli

Mæling seigju með snúningspendli

Þetta skapar þrjú tilfelli lausna:

- Undirdempuð sveifla $\omega^2 - \gamma^2 < 0$ með lausn

$$\phi(t) = A\exp(-\gamma t)\cos\omega_0 t$$

- Markdempuð sveifla $\omega^2 - \gamma^2 = 0$ með lausn

$$\phi(t) = A\exp(-\gamma t) + B\exp(-\gamma t)$$

- Yfirdempuð sveifla $\omega^2 - \gamma^2 > 0$ með lausn

$$\phi(t) = A\exp(-(\gamma + \omega_0)t)$$

Undirdempaða sveiflu viljum við skoða nánar með mælingum.

Mæling seigju með snúningspendli

- Vægisstuðull vírsins, k, er fengin með því að ákveða sveiflutíma fyrir þekktar hverfitregður. Með því að finna mismun hverfitregða tveggja kefla má síðan reikna k, Þannig fæst

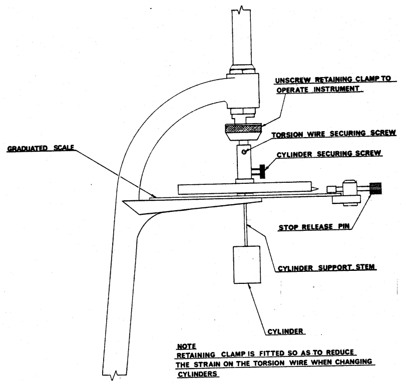
  $$k = 4\pi^2 \frac{I_1 - I_2}{T_1^2 - T_2^2}$$

  Hverfitregða pendúls nr. i er þá rituð

  $$I_0 + I_i = k \left(\frac{\mathcal{T}_i}{2\pi} \right)$$

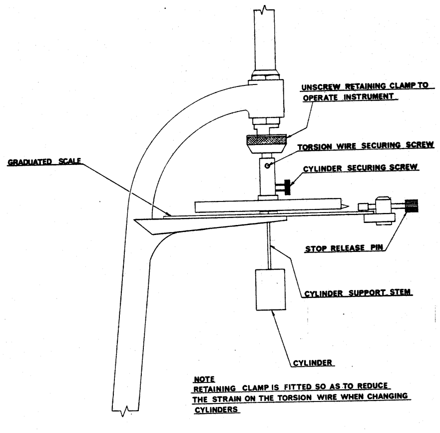
  þar sem $i = 1, 2, 3.$

Mæling seigju með snúningspendli



- Snúningspendúll sá er notaður er við mælinguna er í raun vír sem í er fest kasthjól.
- Í kasthjólið er síðan festur vísirinn sem bendir á sveifluhorn það sem sýnir snúning pendúls.
- Neðan í vírinn má síðan hengja sívalninga eða kefli af nokkrum mismunandi stærðum og þyngdum.

Mæling seigju með snúningspendli



- Við mælingu á seigju eru kefli látin snúast í bikar sem í er olía.
- Til að ákvarða vægisstuðul vírsins var fyrst mælt með tveimur mismundi sívalningum án þess að olía væri til að dempa sveifluna. Þekkt er að hverfitregða gegnheils sívalnings er $I = (1/2)MR^2$.
- Til að fá réttan massa á sívalning þarf að draga frá massa stangar sem við hann er fest.

Mæling seigju með snúningspendli

Framkvæmd tilraunar

1. Komið kefli fyrir í olíunni
2. Snúið keflinu um -360°, sleppið og mælið útslag fyrstu sveiflunnar
3. Lesið eðlisseigju af grafi frá framleiðanda tækis og reiknið seigju olíunnar
4. Endurtakið fyrir samtals þrjú mismunandi kefli
5. Ákvarðið vægistuðul vírsins (notast í tölulegum reikningum)

Heimildir

[1] L.D. Landau and E.M. Liftshiftz, *Fluid Mechanics*, 2nd edition, Pergamon Press, 1987

[2] R. B. Bird, W. E. Stewart and E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, 1960

[3] G. K. Batchelor, *Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967

[4] V. Fidleris and R. L. Whitmore, Experimental determination of the wall effect for spheres falling axially in cylindrical vessels, *British Journal of Applied Physics*, **12**(9) (1961) 490–494

[5] G. G. Stokes, On the Effect of Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums, *Transaction of the Cambridge Philosophical Society*, **9**(2) (1851) 8–106