Verkleg eðlisfræði:

Seigja vökva

Tilraun 2

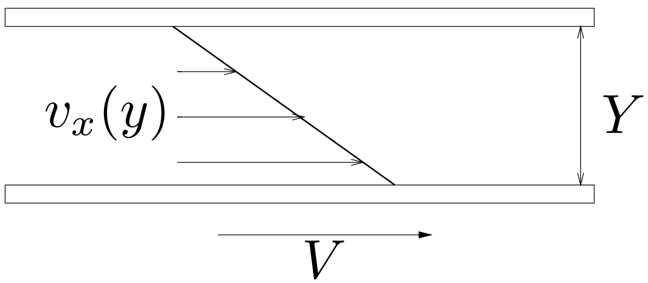
Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

4. febrúar 2021

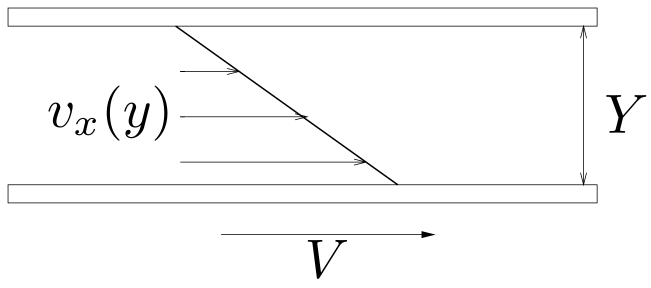
Almennt um seigju

- Sá eðliseiginleiki sem er einkennandi fyrir rennslisviðnám einfaldra vökva er nefndur **seigja**
- Gerum ráð fyrir vökva sem situr á milli tveggja stórra samsíða platna sem hafa yfirborðsflatarmál A og aðskilnað Y
- Gerum ráð fyrir að kerfið sé upphaflega í kyrrstöðu við tímann $t = 0$
- Við $t = 0$ er neðri platan sett á hreyfingu með fastann hraða V



- Í fyllingu tímans verður hraðadreifingin í vökvanum eins og myndin sýnir

Almennt um seigju



- Þegar þessu æstæða ástandi hefur verið náð þarf fastan kraft F til að viðhalda hreyfingu neðri plötunnar

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y}$$

- Það er krafturinn á einingarflatarmál er í réttu hlutfalli við hraðaminnkunina yfir fjarlægðina Y

Almennt um seigju

- Þetta má rita sem

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}$$

  sem segir að **skerkraftur** á einingarflöt sé í réttu hlutfalli við neikvæðan hraðastigul

- Þessi líking er þekkt sem **seigjulögmál Newtons** og vökvar sem hlýta því eru sagðir **Newtonskir**

Almennt um seigju

- Oft er hentugt að nota hlutfall seigju og eðlismassa sem nefnt er **eðlisseigja** (e. kinematic viscosity)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \ \ [\mathrm{cm}^2\mathrm{s}^{-1}]$$

þar sem

$$\mu \ \ [\mathrm{g\ cm}^{-1}\mathrm{s}^{-1}]$$

er **skriðseigja** (e. dynamic viscosity) – cgs einingin fyrir $[\mathrm{g\ cm}^{-1}\mathrm{s}^{-1}]$ er kölluð [poise] og

$$\rho \ \ [\mathrm{g\ cm}^{-3}]$$

er eðlismassi (e. mass density)

Almennt um seigju

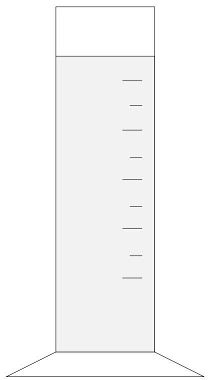
Dæmigerð gildi á seigju við stofuhita (gös við 1 atm):

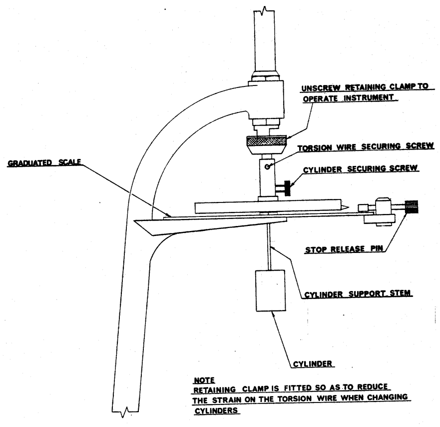
	Skriðseigja μ [cp]	Eðlisseigja $\nu \times 10^2$ [cm^2/s]
andrúmsloft	0.01813	15.05
vatn	1.0019	1.0037
motorolía	800	
glycerol	107	
O_2	0.0203	
CO_2	0.0146	

- Seigja gasa eykst með auknu hitastigi
- Seigja vökva fellur með auknu hitastigi

Mæling seigju

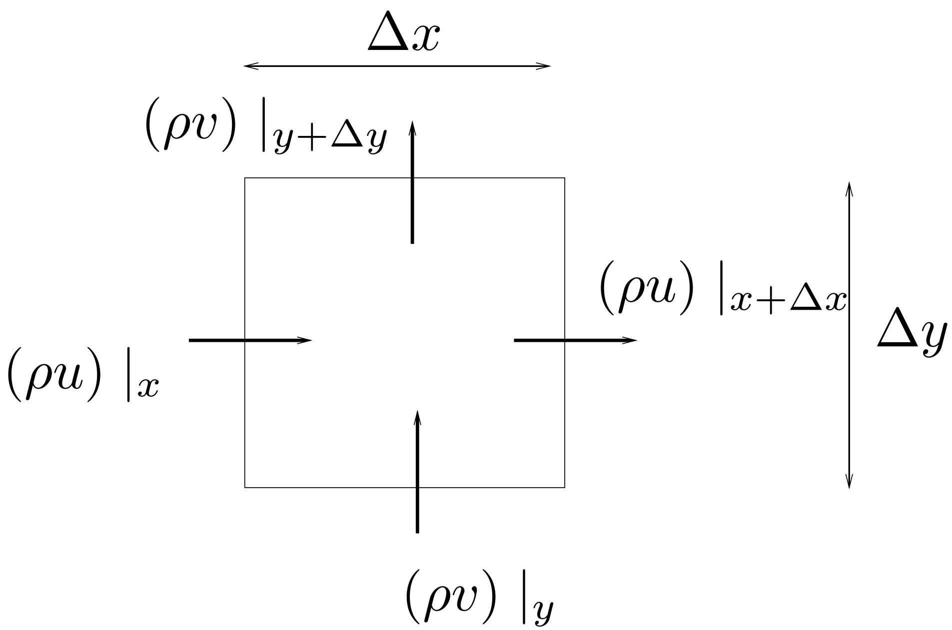
- Seigju olíu í glasi má mæla á einfaldan hátt með því að láta kúlur falla í gegnum olíuna og mæla fallhraðann, **falltilraun Stokes**.
- Hana má einnig mæla með snúningspendli, þar sem kefli í olíunni dempar sveifluna.
- Tilgangur tilraunarinnar er að kynnast seigju vökva og jöfnu Navier-Stoke með mælingum og tölulegum reikningum.





Varðveisla massa

$$\begin{pmatrix} \text{Uppsöfnun} \\ \text{massa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Massa-} \\ \text{flæði} \\ \text{inn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Massa-} \\ \text{flæði} \\ \text{út} \end{pmatrix}$$



Varðveisla massa

Við getum ritað þetta á forminu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right)$$

sem er ritað á vigurformi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

þar sem $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ er nefnt sundurleitni $\rho \mathbf{v}$.

Varðveisla massa

Ef diffrunin er framkvæmd fæst

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

sem gjarnan er ritað á Lagrangian formi

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

Samfelldnijafnan fyrir ósamþjappanlegan vökva er

$$\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

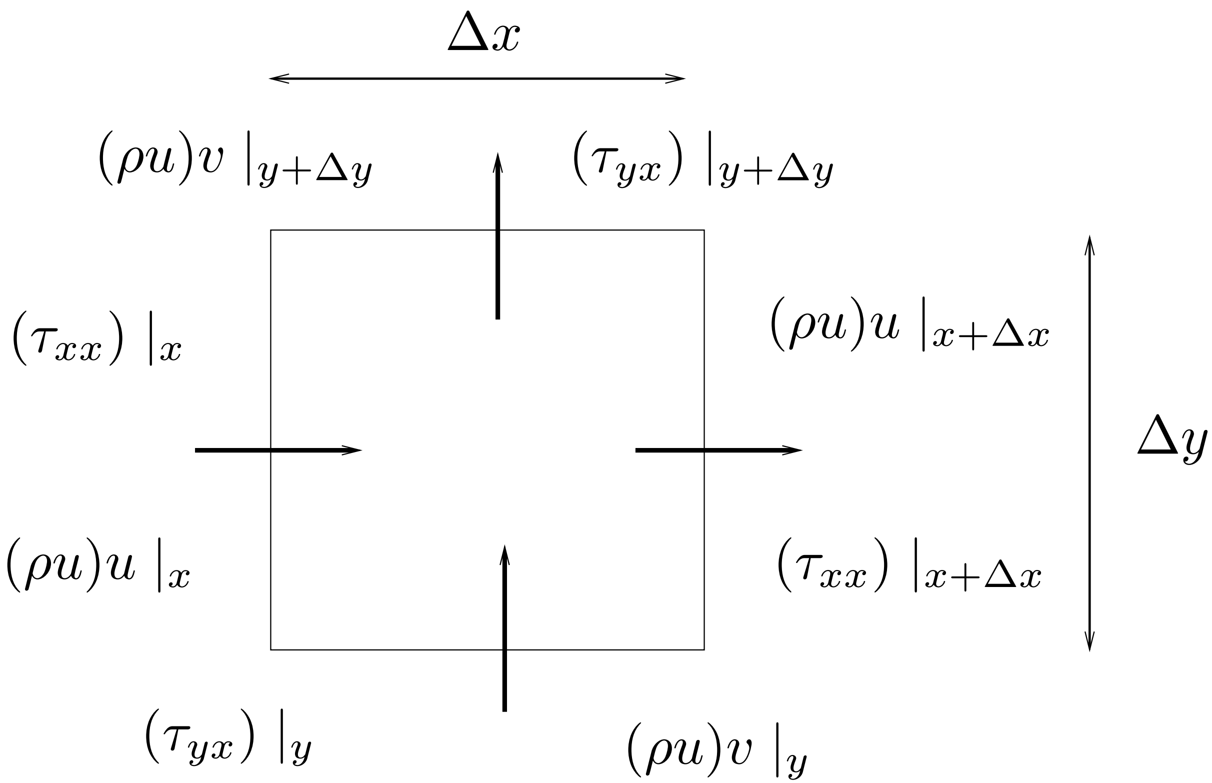
Varðveisla skriðþunga

Skiðþunginn er varðveittur:

$$\begin{pmatrix} \text{Uppsöfnun} \\ \text{skriðþunga} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Kraftar} \\ \text{sem verka} \\ \text{á kerfið} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \text{Skriðþunga-} \\ \text{flæði} \\ \text{inn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Skriðþunga-} \\ \text{flæði} \\ \text{út} \end{pmatrix}$$

Varðveisla skriðþunga



Varðveisla skriðþunga

Ef skoðuð er rúmmálseining

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = \Delta y(p_x - p_{x+\Delta x}) + \rho g_x \Delta x \Delta y$$
$$+\Delta y(\tau_{xx}\mid_x - \tau_{xx}\mid_{x+\Delta x}) + \Delta x(\tau_{yx}\mid_y - \tau_{yx}\mid_{y+\Delta y})$$
$$+\Delta y(\rho uu\mid_x - \rho uu\mid_{x+\Delta x}) + \Delta x(\rho uu\mid_y - \rho uu\mid_{y+\Delta y})$$

sem inniheldur

- Þrýstingskrafta í $x-$stefnu
- Þyngdarkrafta á rúmmálseininguna
- Sveim skriðþunga vegna skerkrafta inn- og út úr rúmmálseiningunni
- Straumburð (e. convection) skriðþunga inn og út úr rúmmálseiningunni

Varðveisla skriðþunga

Látum nú Δx og Δy stefna á núll, þá er jafnan fyrir varðveislu skriðþunga í $x-$stefnu

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u)\right)$$
$$- \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx})\right) + \rho g_x$$

og $y-$stefnu

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v)\right)$$
$$- \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy})\right) + \rho g_y$$

Varðveisla skriðþunga

sem verður á vigurformi

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla p - [\nabla\cdot\rho\mathbf{v}\mathbf{v}] - [\nabla\cdot\tau] + \rho\mathbf{g}$$

Diffrum og notum samfelldni jöfnuna

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\right) + \rho g_x$$

sem er á vigurformi

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p - [\nabla\cdot\tau] + \rho\mathbf{g}$$

Varðveisla skriðþunga

Hreyfijafnan

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho \mathbf{g}$$

segir að lítil rúmmálseining, sem hreyfist með vökva, verður fyrir hröðun vegna krafta sem á hana verka

Þetta er **annað lögmál Newtons**

$$\text{massi} \times \text{hröðun} = \text{summa krafta}$$

Varðveisla skriðþunga

Gerum nú ráð fyrir Newtonskum vökva

$$\tau_{xx} = -2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})$$

$$\tau_{yy} = -2\mu\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

svo að skriðþungajafnan verður

$$\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x +$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)\right]$$

Varðveisla skriðþunga

Fyrir ósamþjappanlegan vökva þar sem

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

og seigjan er fasti fæst

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$$

sem er jafna Navier-Stokes.

Í $x-$stefnu er jafna Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g$$

Varðveisla skriðþunga

Ef áhrif seigju eru óveruleg þá er

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$$

sem er jafna Eulers

Einingalaus framsetning

Skilgreinum einingalausar stærðir

$$v^* = \frac{v}{V} \quad p^* = \frac{p - p_o}{\rho V^2} \quad t^* = \frac{tV}{D}$$

$$x^* = \frac{x}{D} \quad y^* = \frac{y}{D} \quad z^* = \frac{z}{D}$$

og stingum inn í jöfnu Navier-Stokes í $x-$stefnu

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) =$$

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \left(\frac{\mu}{DV\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) + \left(\frac{gD}{V^2} \right) \frac{g_x}{g}$$

Einingalaus framsetning

Svo að myndaðar hafa verið einingarlausar stærðir

$$\mathrm{Re} = \frac{DV\rho}{\mu} \quad \text{Reynoldstala}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{V^2}{gD} \quad \text{Froude-tala}$$

Einingalaus framsetning

Reynoldstala

$$\mathrm{Re} = \frac{DV\rho}{\mu} = \frac{\rho V^2}{\mu V/D} = \frac{\text{tregðukraftar}}{\text{seigjukraftar}}$$

Froude-tala

$$\mathrm{Fr} = \frac{V^2}{gD} = \frac{\rho V^2}{\rho g D} = \frac{\text{tregðukraftar}}{\text{þyngdarkraftar}}$$

Mæling seigju með aðferð Stokes

- Gerum nú ráð fyrir stöðugu streymi um kúlu í ósamþjappanlegum vökva
- Þegar kúlan hreyfist með jöfnum hraða í gegnum vökvann eru það þrír þættir sem áhrif hafa á hreyfinguna
  - skriðseigja vökvans, μ,
  - hraði kúlunnar u
  - stærð kúlunnar, a
- Út frá þessum stærðum finnum við Reynoldstöluna

$$\mathrm{Re} = \frac{au\rho}{\mu}$$

Mæling seigju með aðferð Stokes

- Stöðugt flæði svarar til þess að $\partial v/\partial t = 0$
- Sýna má að $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \approx v^2/a$ í Navier - Stokes jöfnunni í grennd við hlutinn og að seigjuliðurinn sé $(\mu/\rho)\nabla^2\mathbf{v} \approx \nu v/a^2$

Mæling seigju með aðferð Stokes

- Reynoldstalan er einingalaus stærð sem segir til um stöðugleikann í flæðinu og hvenær flæðið byrjar að vera iðustreymandi
- Ef $\mathrm{Re} \ll 1$ er liðurinn $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ óvera
- Í þeim lið tilraunarinnar þar sem kúlur eru látnar falla hægt í vökva sem er mun seigari en vatn má ætla að $\mathrm{Re} \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ þannig að jafnan verður línuleg hlutafleiðujafna sem leyst er með tilheyrandi randskilyrðum fyrir kúlu og við höfum **skriðflæði** (e. creeping flow).
- Þessi jafna er einfaldlega

$$\mu\nabla^2\mathbf{v} - \nabla p = 0$$

- Hraðadreifingin hefur randskilyrðin $v_r = v_\theta = 0$ við yfirborð kúlunnar

Mæling seigju með aðferð Stokes

- Einföld leið til að mæla seigju vökva er að sleppa kúlu í gegnsætt rör sem inniheldur vökvann
- Ef rétt er staðið að nær kúlan tilteknum lokahraða u_∞
- Með því að ákvarða þennan lokahraða má ákvarða seigju vökvans
- Jafnan
$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p = 0$$
er leyst til að finna hraðadreifinguna og þar með kraftana sem á kúluna verka
- Viðnámskrafturinn sem út úr þessari jöfnu fæst er gefinn með (1; 2; 3)
$$F_\mathrm{k} = 6\pi\mu a u_\infty$$
sem er lögmál Stokes.

Mæling seigju með aðferð Stokes

- Uppdrifskrafturinn er

$$F_{\mathrm{s}} = \frac{4}{3}\pi a^3 g u_\infty (\rho_{\text{kúla}} - \rho_{\text{olía}})$$

- Summa kraftanna sem á kúluna verkar er núll eða

$$F_{\text{þyngdar}} + F_{\text{uppdrif}} + F_{\text{viðnám}} = 0$$

- Þessa staðreynd má síðan nota til að finna eðlisseigju vökvans, ef hraðinn er þekktur

$$\mu = \frac{2ga^2(\rho_{\text{kúla}} - \rho_{\text{olía}})}{9u_\infty}$$

þar sem a er radíi kúlu, D er innra þvermál bikars og u_∞ er lokahraði kúlu.

Mæling seigju með aðferð Stokes

- Viðnámskraftinn þarf að leiðrétta fyrir áhrifum tregðukrafta (3)

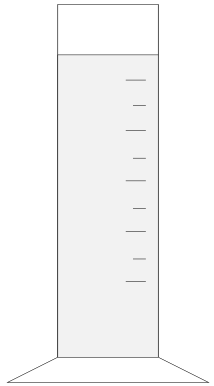
$$F_{\mathrm{k}} = 6\pi\mu a u_{\infty}\left[1 + \frac{3}{16}\mathrm{Re} - \frac{19}{1280}\mathrm{Re}^2 + ...\right]$$

- Til að taka tillit til áhrifa veggjar sívalningssins þar að leiðrétta með Faxén og Ladenburg liðnum

$$\mu_0 = \mu\left\{1 - \left[2.104\left(\frac{a}{D}\right) - 2.09\left(\frac{a}{D}\right)^2 + 0.95\left(\frac{a}{D}\right)^4\right]\right\}$$

Ef $a/D < 0.01$ er leiðréttingin óveruleg

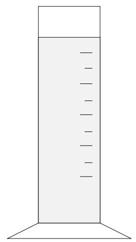
Framkvæmd tilraunar



- Olíunni er komið fyrir í 2000 ml mæliglasi af gerðinni Pyrex B.S.604.
- Mældur er fallhraði lítilla málm- og glerkúlna með þekkt þvermál og eðlismassa.
- Hraðinn er ákvarðaður með því að mæla tímann sem það tekur kúlurnar að falla tiltekna vegalengd.

Mæling seigju með aðferð Stokes

Framkvæmd tilraunar



1. Mælið eðlismassa olíunnar
2. Finnið eðlismassa og radía kúlna
3. Leiðið út jöfnu fyrir seigju olíu sem fall af fallhraða kúlna
4. Mælið fallhraða kúlna í olíunni, hver er Reynoldstalan ? Er nálgunin réttlætanleg ?
5. Reiknið seigju olíunnar

Mæling seigju með snúningspendli

- Skoðum nú hina þrjá þætti Navier - Stokes jöfnunnar í sívalningshnitum. Viljum finna v_ϕ.
- Gerum nú ráð fyrir að $v_r = v_z = 0$ og $\partial/\partial\phi = 0$ þar eð ekki eru hringstraumar.
- Fyrir langt kefli er $\partial/\partial z = 0$. Þegar þetta er sett inn stendur eftir ein jafna

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r^2} \right)$$

Mæling seigju með snúningspendli

- Með innsetningu á $u = rv_\phi$ fæst

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

og þá er

$$\sigma_{r\phi} = \mu \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) = \mu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} \right)$$

Mæling seigju með snúningspendli

Almennt er dempuðum snúningspendli lýst með jöfnunni

$$I\ddot{\phi} = -k\phi + \tau(\mu, \phi) = -k\phi - b\dot{\phi}$$

þar sem I er hverfitregða keflis og skífu, k er vægisstuðull vírsins og $\tau(\mu, \phi)$ er dempunarliður sem stafar af seigju. Lausn þessarar jöfnu fyrir ódempað kefli hefur horntíðni

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{k}{I}\right)^{1/2}$$

og þegar dempun $\gamma = \frac{b}{2I}$ er tekin með er sveiflutíminn

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \left(\omega^2 - \gamma^2\right)^{1/2}$$

Mæling seigju með snúningspendli

Þetta skapar þrjú tilfelli lausna:

- Undirdempuð sveifla $\omega^2 - \gamma^2 < 0$ með lausn

$$\phi(t) = A\exp(-\gamma t)\cos\omega_0 t$$

- Markdempuð sveifla $\omega^2 - \gamma^2 = 0$ með lausn

$$\phi(t) = A\exp(-\gamma t) + B\exp(-\gamma t)$$

- Yfirdempuð sveifla $\omega^2 - \gamma^2 > 0$ með lausn

$$\phi(t) = A\exp(-(\gamma + \omega_0)t)$$

Undirdempaða sveiflu viljum við skoða nánar með mælingum.

Mæling seigju með snúningspendli

Vægisstuðull vírsins, k, er fengin með því að ákveða sveiflutíma fyrir þekktar hverfitregður. Með því að finna mismun hverfitregða tveggja kefla má síðan reikna k, Þannig fæst

$$k = 4\pi^2 \frac{I_1 - I_2}{T_1^2 - T_2^2}$$

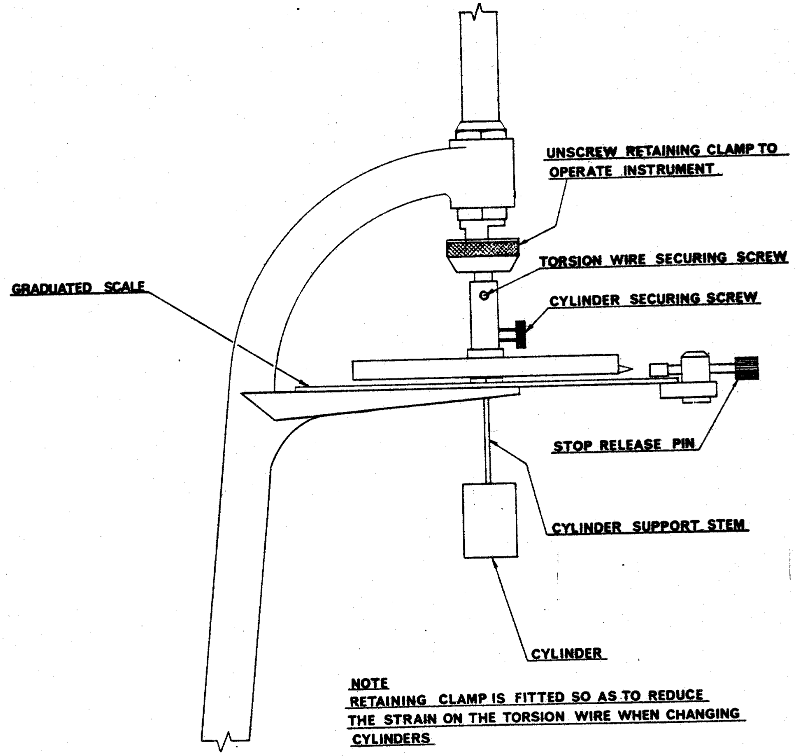
Hverfitregða pendúls nr. i er þá rituð

$$I_0 + I_i = k \left(\frac{\tau_i}{2\pi} \right)$$

þar sem $i = 1, 2, 3$.

Mæling seigju með snúningspendli

- Snúningspendúll sá er notaður er við mælinguna er í raun vír sem í er fest kasthjól.
- Í kasthjólið er síðan festur vísirinn sem bendir á sveifluhorn það sem sýnir snúning pendúls.
- Neðan í vírinn má síðan hengja sívalninga eða kefli af nokkrum mismunandi stærðum og þyngdum.


UNSCREW RETAINING CLAMP TO OPERATE INSTRUMENT
TORSION WIRE SECURING SCREW
GRADUATED SCALE
CYLINDER SECURING SCREW
STOP RELEASE PIN
CYLINDER SUPPORT STEM
CYLINDER
NOTE
RETAINING CLAMP IS FITTED SO AS TO REDUCE THE STRAIN ON THE TORSION WIRE WHEN CHANGING CYLINDERS

Mæling seigju með snúningspendli

- Við mælingu á seigju eru kefli látin snúast í bikar sem í er olía.
- Til að ákvarða vægisstuðul vírsins var fyrst mælt með tveimur mismundi sívalningum án þess að olía væri til að dempa sveifluna. Þekkt er að hverfitregða gegnheils sívalnings er $I = (1/2)MR^2$.
- Til að fá réttan massa á sívalning þarf að draga frá massa stangar sem við hann er fest.

1. Komið kefli fyrir í olíunni
2. Snúið keflinu um -360°, sleppið og mælið útslag fyrstu sveiflunnar
3. Lesið skriðseigju af grafi frá framleiðanda tækis og reiknið seigju olíunnar
4. Endurtakið fyrir samtals þrjú mismunandi kefli

5. Ákvarðið vægistuðul vírsins (notast í tölulegum reikningum)

Heimildir

[1] L.D. Landau and E.M. Liftshiftz, *Fluid Mechanics*, 2nd edition, Pergamon Press, 1987

[2] R. B. Bird, W. E. Stewart and E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena* , John Wiley & Sons, 1960

[3] G. K. Batchelor, *Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967

[4] Auglýsingabæklingur frá Skeljungi h.f.