Greining rása:

Orkugeymandi rásaeiningar

Kafli 7

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

15. febrúar 2005

Inngangur

- Geymsla orku í rásaeiningum er mikilvægur og notadrjúgur eiginleiki í rásum
- Í þessum kafla eru innleiddar rásaeiningarnar **þéttar** og **spólur**, sem kallaðar eru **orkugeymandi rásaeiningar**
- Rásaeiningar eru eðlisfræðilegt fyrirbæri sem skilgreinir sambandið milli straumsins í gegnum eininguna og spennunnar yfir hana

Línulegt samband

Samband milli tveggja breyta x og y er **línulegt** ef það uppfyllir tvö skilyrði

- Ef $y = g(x)$ þá er $g(ax) = ay$, a er fasti
- Ef $y_1 = g(x_1)$ og $y_2 = g(x_2)$ þá er $g(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$

Línuleg rásaeining er sérhver sú rásaeining þar sem straumur og spenna tengjast með línlegum hætti

Tegrun

Tegrun

$$y = g(x) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

þar sem

$$g(ax) = \int_{-\infty}^{t} ax(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= a\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau = ag(x) = ay$$

og

$$g(x_1 + x_2) = \int_{-\infty}^{t} (x_1(\tau) + x_2(\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= g(x_1) + g(x_2) = y_1 + y_2$$

er línuleg aðgerð

Diffrun

Diffrun

$$y(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = g(t)$$

þar sem

$$g(ax) = \frac{\mathrm{d}(ax(t))}{\mathrm{d}t} = a\frac{\mathrm{d}(x(t))}{\mathrm{d}t} = ag(x) = ay$$

og

$$\begin{aligned} g(x_1 + x_2) &= \frac{\mathrm{d}(x_1(t) + x_2(t))}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= g(x_1) + g(x_2) = y_1 + y_2 \end{aligned}$$

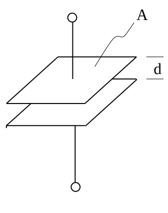
er línuleg aðgerð

Afl

- Afl sem línuleg rásaeining fær frá umhverfi sínu er
$$p(t) = v(t)i(t)$$
- Ef $p(t) < 0$ þá er rásaeiningin að láta frá sér afl og ef $p(t) > 0$ er rásaeiningin að taka til sín afl
- Samkvæmt skilgreiningu er
$$p(t) = \frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}$$
- Orkan sem rásaeining fær frá umhverfi sínu er
$$w(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)\mathrm{d}t$$

Þéttir

- Þéttir er tveggja póla rásaeining sem samanstendur af tveim leiðandi plötum og einangrandi efni á milli



- Fyrir þétti er samband straums og spennu er gefið með jöfnunni
$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
þar sem stuðullinn C kallast **rýmd** þéttisins og hefur eininguna farad [F]
- Einingin er
$$1\ \mathrm{F} = \frac{1\ \mathrm{C}}{1\ \mathrm{V}}$$

Þéttir

- Með því að tegra báðar hliðar jöfnunnar frá $t = -\infty$ til einhvers tímapunkts t_0 fæst
$$v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(t)\mathrm{d}t$$
- Tegrið $\int_{-\infty}^{t_0} i(t)\mathrm{d}t$ er nettóhleðslan q sem safnast hefur fyrir í þéttinum við tímann t_0 af völdum straumsins sem streymt hefur inn í þéttinn frá $t = -\infty$ til $t = t_0$, þ.e.
$$q(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} i(t)\mathrm{d}t$$
- Þá er
$$v(t) = \frac{q(t)}{C} \qquad \text{fyrir öll} \quad t$$
og þar með er
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}i(t)$$

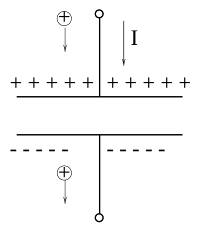
Þéttir

- Þéttir er línuleg rásaeining, sambandið milli spennu og hleðslu er línulegt og straumurinn finnst með því að diffra hleðsluna, sem er línuleg aðgerð
- Þéttir er rásaeining sem geymir hleðslu; því meiri hleðslu sem hann geymir, þeim mun hærri spenna mælist yfir hann

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} \qquad \text{fyrir öll} \quad t$$

Þéttir

- Þéttir er gerður úr tveim leiðandi plötum með einangrandi (rafsvara) efni á milli
- Þegar fastur straumur I streymir "um" þétti þá safnast jákvæðar hleðslur jafnt og þétt á plötuna þar sem straumurinn streymir inn



- Jákvæðar hleðslur flæða út úr þéttinum hinummegin svo að heildar hleðslan á þeirri plötu verður neikvæð. Þar sem straumur út er jafn stór og straumur inn þá er jafn stór hleðsla á báðum plötunum, $q(t)$, aðeins með mismunandi formerki.

Þéttir

- Milli jákvæðu hleðslanna á annarri plötunni og neikvæðu hleðslanna á hinni plötunni ríkir aðdráttarkraftur, þ.e. þéttirinn **geymir orku**.
- Þessa orku má finna sem tegrið af aflinu sem þéttirinn hefur fengið frá umhverfi sínu, við einhvern tíma $t = t_0$

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} p(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{t_0} v(t)i(t)\mathrm{d}t$$

Notum að $i(t) = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$

$$w(t_0) = \int_{q(-\infty)}^{q(t_0)} v(t)\mathrm{d}t = \int_{v(-\infty)}^{v(t_0)} Cv(t)\mathrm{d}v$$

með $v(-\infty) = 0$ fæst

$$w(t_0) = \frac{1}{2}Cv^2(t_0)$$

eða almennt

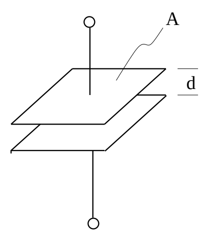
$$w(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

Þéttir

- Þar með er aflið

$$p(t) = Cv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v(t)i(t)$$

- Gerum nú ráð fyrir plötuþétti sem samanstendur af plötum með flatarmál A og aðskilnað d



- Ef plöturnar hafa hleðslu Q þá er **yfirborðshleðsluþéttleiki**

$$\rho_{\mathrm{s}} = \frac{Q}{A}$$

Þéttir

- **Rafsviðsstyrkur** E milli platnanna er einsleitur og af styrk

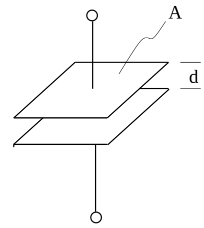
$$E = \frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\epsilon}$$

með $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ þar sem ϵ_0 er **rafsvörunarstuðull lofttæmis** og ϵ_r er **hlutfallslegur rafsvörunarstuðull** efnisins milli platnanna

- Hlutfallslegur rafsvörunarstuðull

Efni	$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$
Gler	7
Nylon	2
Bakelite	5

Þéttir



- Spennan yfir þéttinn er þá

$$v = \int_1^2 \mathbf{E} \mathrm{d}\mathbf{s} = Ed$$

og rýmdin

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{\epsilon A}{d}$$

Þéttir

Tveir mikilvægir eiginleikar þéttis

- Ef spenna yfir þétti er sínuslaga

$$v_{\mathrm{C}}(t) = V \sin(\omega t)$$

þá verður straumurinn

$$i_{\mathrm{C}}(t) = C\omega V \cos(\omega t)$$

þ.e. í beinu hlutfalli við tíðnina

$$\text{há tíðni} \longrightarrow \text{hár straumur}$$

$$\text{lág tíðni} \longrightarrow \text{lítill straumur}$$

- Ef tíðnin er mjög há má setja skammhlaup í stað þéttisins og ef hún er núll (dc) má setja opna rás í stað þéttis.
- Til að spennan $v_{\mathrm{C}}(t)$ yfir þéttinn geti breyst ósamfellt verður straumurinn $i_{\mathrm{C}}(t)$ að vera óendanlega hár, þ.e. impúls

Þéttir

Því má segja að ef engir impúlsar eru til staðar þá verður spennan yfir þéttinn alltaf samfelld, þ.e. engin spennuþrep eru möguleg (nema impúlsar komi til)

$\Longrightarrow$ Dæmi 7.1.

Spenna yfir sérhvern þétti við $t > 0$ ræðst af tvennu:

- Hvaða straumur hefur flætt inn í þéttinn síðan $t = 0$
- Hvaða spenna var yfir þéttinn við $t = 0$

Þetta má skrifa sem

$$v_{\mathrm{C}}(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_{\mathrm{C}}(\tau) \mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0} i_{\mathrm{C}}(\tau) \mathrm{d}\tau + \frac{1}{C} \int_{0}^{t} i_{\mathrm{C}}(\tau) \mathrm{d}\tau$$

Fyrra tegrið er nettóhleðslan sem safnast hefur í þéttinum á tímabilinu $-\infty < t < 0$. Þegar deilt er með rýmd þéttisins C þá fæst spennan yfir þéttinn við tímann $t = 0$.

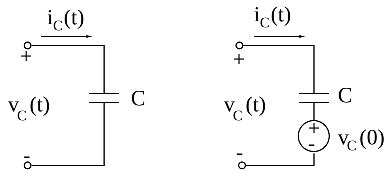
Þess vegna er

$$v_\mathrm{C}(t) = v_\mathrm{C}(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_\mathrm{C}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

eða

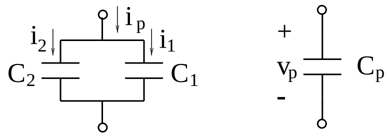
$$v_\mathrm{C}(t) = v_\mathrm{C}(0) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^t i_\mathrm{C}(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

sem segir að í stað þéttis sem hefur upphafsgildi við $t = 0$ má setja jafnstóran þétti sem er óhlaðinn við $t = 0$ og raðtengda spennulind með spennu $v_\mathrm{C}(0)$.



Þéttir

$\Longrightarrow$ Dæmi 7.2.



Ef tveir þéttar C_1 og C_2 eru hliðtengdir má setja í stað þeirra einn jafngildisþétti C_p.

$$i_\mathrm{p} = C_\mathrm{p}\frac{\mathrm{d}V_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}$$

eða

$$i_\mathrm{p} = i_1 + i_2 = C_1\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} + C_2\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}$$

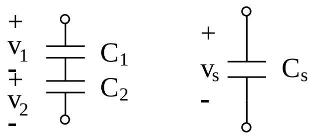
og þar sem $V_\mathrm{p} = V_1 = V_2$ þá er

$$i_\mathrm{p} = (C_1 + C_2)\frac{\mathrm{d}V_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}$$

eða

$$C_\mathrm{p} = C_1 + C_2$$

Þéttir



Ef tveir þéttar C_1 og C_2 eru raðtengdir má setja í stað þeirra einn jafngildisþétti C_s

$$v_\mathrm{s}(t) = \frac{1}{C_\mathrm{s}}\int_{-\infty}^t i_\mathrm{s}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

eða þar eð $v_\mathrm{s} = v_1(t) + v_2(t)$ þá er

$$v_\mathrm{s}(t) = \frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^t i_1(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^t i_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

og $i_\mathrm{s} = i_1 = i_2$ svo að

$$v_\mathrm{s}(t) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1}\right)\int_{-\infty}^t i_\mathrm{s}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

eða

$$C_\mathrm{s} = \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

Spóla

- Vír má vinda upp og mynda spólu
- Línuleg spóla er rásaeining þar sem samband straums og spennu er gefið með jöfnunni
$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$
- Stuðullinn L kallast **span** spólunnar og hefur eininguna henry [H]
- Með því að tegra báðar hliðar jöfnunnar frá $t = -\infty$ til einhvers tímapunkts t_0 fæst
$$i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v(t)\mathrm{d}t$$
þ.e. straumurinn í spólunni ræðst af því hvernig spennan yfir hana hefur verið frá upphafi

Spóla

Við getum séð að spólan er orkugeymandi rásaeining með því að finna heildarorkuna sem hún hefur þegið frá umhverfi sínu:

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} p(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{t_0} v(t)i(t)\mathrm{d}t$$

eða

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} i(t)\mathrm{d}t = L\int_{i(-\infty)}^{i(t_0)} i(t)\mathrm{d}i$$

Með $i(-\infty) = 0$ fæst

$$w(t_0) = L\frac{i^2(t_0)}{2}$$

eða almennt

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

Þar með er aflið

$$p(t) = Li(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = i(t)v(t)$$

Spóla

Lítum á tvo mikilvæga eiginleika spólu:

- Ef straumurinn í spólunni er sínuslaga

  $$i_L(t) = I\sin(\omega t)$$

  þá verður spennan

  $$v_L(t) = L\omega I\cos(\omega t)$$

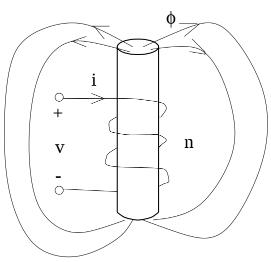
  þ.e. í beinu hlutfalli við tíðnina

  $$\text{há tíðni} \longrightarrow \text{há spenna}$$

  $$\text{lág tíðni} \longrightarrow \text{lág spenna}$$

- Ef tíðnin er mjög há má setja opna rás í stað spólunnar og ef hún er núll (dc) má setja skammhlaup í stað spólunnar
- Ef engir spennuimpúlsar eru til staðar þá er straumurinn í spólunni samfelldur, þ.e. enginn straumþrep eru möguleg (nema impúls komi til)

Spóla



- Dæmigerð spóla er undin úr viðnámslausum vír með n vindingum. Ef straumur i fer um spóluna þá myndast segulsvið $\phi(t)$ sem hefur lokaðar segulsviðslínur.
- Spennan yfir spóluna er tímaafleiðan af segulflæðinu $n\phi$,

  $$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n\phi) = n\frac{\mathrm{d}(\phi)}{\mathrm{d}t}$$

- Jákvæð spenna þýðir að segulsviðið sé að vaxa; neikvæð spenna þýðir að það fari minnkandi.

Spóla

Stærðin á segulflæðinu ϕ ræðst af straumnum $i(t)$. Sé spólan línuleg gildir

$$\phi(t) = \frac{L}{n}i(t)$$

Leysum fyrir strauminn

$$i(t) = \frac{1}{L}n\phi = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

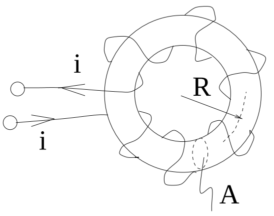
eða

$$n\phi = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

sem þýðir að segulsviðið ræðst af því hver spennan hefur verið frá upphafi.

Span hverrar spólu ræðst af stærð hennar og lögun

Spóla



Fyrir hjólaslöngulaga spólu með n vindinga gildir

$$L = \frac{\mu_r \mu_0 n^2 A}{2\pi R}$$

þar sem μ_0 er **segulsvörunarstuðull lofttæmis**, μ_r er **hlutfallslegur segulsvörunarstuðull** efnis spólukjarna, A er þverskurðarflatarmál spólukjarnans og R er radíi spólunnar.

Almennt gildir að spanið er í réttu hlutfalli við vindingafjöldann í öðru veldi og í réttu hlutfalli við þverskurðarflatarmálið, en í öfugu hlutfalli við lengd leiðarinnar sem segulflæðið fer, l.

Spóla

Með

$$L = \frac{\mu n^2 A}{l}$$

fæst

$$\phi = \mathcal{P} n i$$

þar sem

$$\mathcal{P} = \frac{\mu A}{l}$$

kallast **segulleiðni** leiðarinnar sem segulflæðið fer.

Jafnan hér að ofan er því nokkurskonar Ohm lögmál fyrir segulrásir, þar sem segulflæðið ϕ samsvarar straum, ampervindingarnir ni (mmf, segulíspenna) samsvara spennu og **segultregðan** $\mathcal{R} = 1/\mathcal{P}$ samsvarar viðnámi

Spóla

Ef efnið sem segulflæðið fer um er loft eða lofttæmi (kjarnalaus spóla) þá er $\mathcal{R}$ fasti og sambandið milli ϕ og ni línulegt

Sé kjarninn úr járni eða öðru ferrómagnetísku efni þá er μ (og þar með $\mathcal{R}$) fall af ϕ svo að sambandið milli ϕ og ni verður ólínulegt

Jafnan $v = L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ gildir þá ekki

Hvort sem spólan er línuleg eða ekki þá gildir

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} v(t) i(t) \mathrm{d}t$$

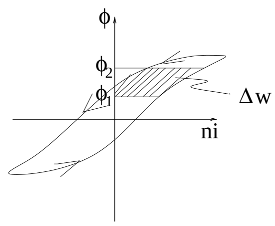
og

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}(n\phi)}{\mathrm{d}t}$$

eða

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \frac{\mathrm{d}(n\phi)}{\mathrm{d}t} i(t) \mathrm{d}t = \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(t_0)} n i(t) \mathrm{d}\phi$$

Spóla



- Orkan sem bætist við geymda orku í spólunni þegar flæðið vex frá ϕ_1 til ϕ_2 er jöfn flatarmálinu Δw
- Sum ferrómagnetísk efni hafa mismunandi $\phi(ni)$ ferla eftir því hvort ni er vaxandi (spóla tekur til sín orku) eða minnkandi (spóla lætur frá sér orku)
- Þetta fyrirbæri kallast **segulheldni**

Spóla

- Sé straumurinn sínuslaga þá er öll segulheldnilykkjan farin í hverri lotu
- Flatarmálið innan lykkjunnar gefur til kynna orkutapið í spólunni í hverri lotu. Sú orka umbreytist í varmaorku.

$\Longrightarrow$ Dæmi 7.3.

- Fyrir $t > 0$ gildir að straumur í spólu er

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

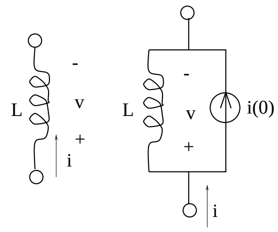
$$= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} v(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

eða

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Spóla

- Í stað spólu með upphafsstraum (við $t = 0$) má því setja spólu án upphafsstraums og hliðtengja straumlind $i(0)$ og reikna síðan strauma og spennur fyrir $t > 0$ út frá þessum gildum

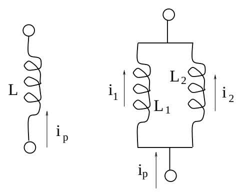


- Ef tvær spólur L_1 of L_2 eru hliðtengdar má setja í stað þeirra eina jafngildisspólu L_p

$$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{-\infty}^{t} v_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$i_2 = \frac{1}{L_2}\int_{-\infty}^{t} v_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Spóla



og

$$i_\mathrm{p} = i_1 + i_2$$

$$v_1 = v_2 = v_\mathrm{p}$$

svo

$$i_\mathrm{p} = i_1 + i_2 = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\int_{-\infty}^{t} v_\mathrm{p}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{L_\mathrm{p}}\int_{-\infty}^{t} v_\mathrm{p}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

eða

$$L_\mathrm{p} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Spóla

Ef tvær spólur L_1 og L_2 eru raðtengdar má setja í stað þeirra eina jafngildisspólu L_s

$$v_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \quad \text{og} \quad v_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

en

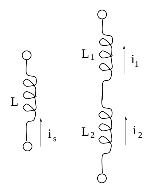
$$i_1 = i_2 = i_\mathrm{s}$$

og

$$v_\mathrm{s} = v_1 + v_2 = (L_1 + L_2)\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} = L_\mathrm{s}\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t}$$

eða

$$L_\mathrm{s} = L_1 + L_2$$



$\Longrightarrow$ Dæmi 7.4.

$\Longrightarrow$ Dæmi 7.5.

Heimildir

[1] R.A. DeCarlo og Pen-Min Lin,*Linear Circuit Analysis: Time Domain, Phasor and Laplace Transform Approaches*, Oxford University Press, 2001, Kafli 7