Greining rása:

# Lögmál Kirchhoffs

## Kafli 2

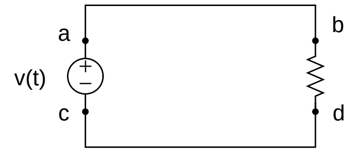
**Jón Tómas Guðmundsson**

tumi@hi.is

**1. vika 2007**



## Lögmál Kirchhoffs




- Fullkominn leiðari tengir saman plúspól spennulindarinnar við efri pól viðnámsins; a og b hafa sömu spennu óháð straumnum $i$.
- Eins hafa punktarnir c og d sömu spennu.
- Spennan í punkti a er $v(t)$ voltum hærri en spennan í punkti c; svo að spennan í punkti b er einnig $v(t)$ voltum hærri en spennan í punkti d.
- Frá punkti c til a er **spennuris** upp á $v(t)$ og síðan **spennufall** frá b til d.



## Lögmál Kirchhoffs

**Spennulögmál Kirchhoffs (KVL)**:

*Á hverjum tíma er algebrísk summa spennurisa umhverfis lokaða leið í rás núll*

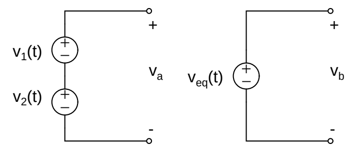
$\Longrightarrow$ Dæmi 2.1.

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.2.



## Lögmál Kirchhoffs

Ef við raðtengjum tvær spennulindir $v_1$ og $v_2$ þá eru þær jafngildar einni spennulind með spennu sem er summa hinna tveggja




(a) (b)

$$v_1 + v_2 - v_a = 0 \qquad => \qquad v_a = v_1 + v_2$$

og

$$v_b = v_{eq}$$

svo að $v_a = v_b$ þá og því aðeins að

$$v_{eq} = v_1 + v_2$$

# Lögmál Kirchhoffs

- Skilgreinum **hnútpunkt** sem hvern þann punkt í rás þar sem pólar tveggja eða fleiri rásaeininga tengjast saman.
- Hnútpunktur getur ekki geymt hleðslu og því er heildarstraumurinn að hnútpunktinum að vera jafn heildarstraumnum frá honum á hverjum tíma.

**Straumlögmál Kirchhoffs (KCL)**:

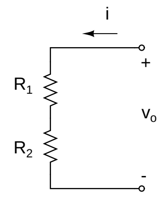
*Á sérhverjum tíma er algebrísk summa allra strauma að ákveðnum hnútpunkti núll*

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.3.

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.4.



# Raðtengd viðnám




Tvær rásaeiningar eru raðtengdar þá og því aðeins að

- annar póll annarar tengist öðrum pól hinnar í hnútpunkti
- engar aðrar rásaeiningar tengist þeim í hnútpunkti

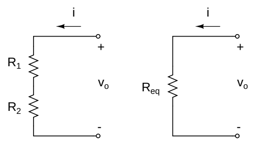
Séu tvær rásaeiningar raðtengdar er:

- straumurinn sá sami í þeim báðum
- heildarspennan jöfn summu spennanna yfir hvora einingu fyrir sig



# Raðtengd viðnám

Fyrir tvö raðtengd viðnám má finna **jafngildisviðnám**, það er eitt viðnám sem gefur sama samband milli spennu og straums og raðtengingin.




(a) (b)

Með KVL fæst:

$$v_o = iR_1 + iR_2 = i(R_1 + R_2)$$

Nú verður að gilda $v = iR_{eq}$ svo

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$



# Raðtengd viðnám

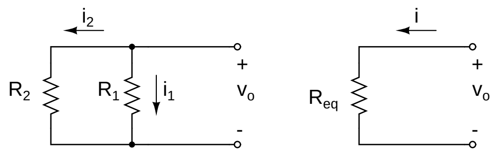
Þetta má útvíkka á $n$ raðtengd viðnám

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Jafngildisviðnám raðtengingar er alltaf stærra en stærsta viðnámið í raðtenginunni.

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.5.

# Hliðtengd viðnám




(a) (b)

Tvær rásaeiningar eru hliðtengdar þá og því aðeins að

- annar póll annarar tengist öðrum pól hinnar í hnútpunkti
- hinir pólarnir tengjast einnig saman í öðrum hnútpunkti

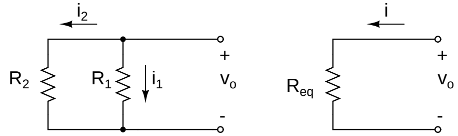
Séu tvær rásaeiningar hliðtengdar er

- spennan sú sama yfir þær báðar
- heildarstraumurinn jafn summu straumanna í hvorri einingu fyrir sig



# Hliðtengd viðnám

Fyrir tvö hliðtengd viðnám má finna jafngildisviðnám




(a) (b)

Með KCL fæst

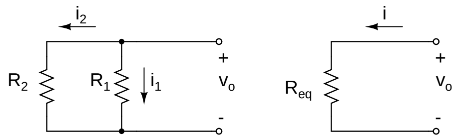
$$i = i_1 + i_2 = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

eða

$$\frac{i}{v} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



# Hliðtengd viðnám




(a) (b)

Nú verður að gilda $v = iR_{\text{eq}}$ eða $i/v = 1/R_{\text{eq}}$ svo

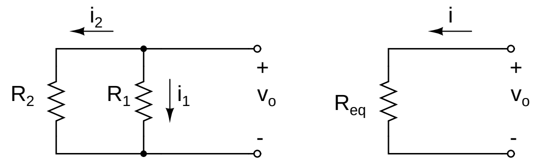
$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

eða

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



# Hliðtengd viðnám




(a) (b)

Þessa niðurstöðu má auðveldlega útvíkka á $n$ hliðtengd viðnám

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

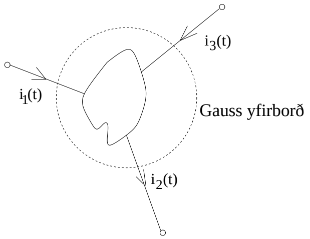
Jafngildisviðnámið er alltaf minna en minnsta viðnámið.

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.6.

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.7.

# Gauss yfirborð

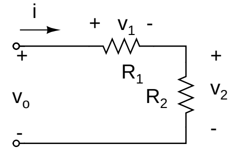
- Straumlögmál Kirchhoffs gildir einnig fyrir lokuð yfirborð, nefnd **Gauss yfirborð**
- Gauss yfirborð er lokaður ferill í planinu eða lokað yfirborð í þremur víddum þar sem vel er skilgreint hvað er fyrir utan og hvað fyrir innan
- Um Gauss yfirborð gildir: *Algebrísk summa strauma sem koma að (eða yfirgefa) Gaussískt yfirborð á hverjum tíma er núll*






# Spennudeiling

Oft þekkjum við heildarspennu yfir raðtengingu tveggja viðnáma en þurfum að vita spennuna yfir annað viðnámið.




Viljum t.d. finna $v_2$ ef við þekkjum $v_o$ (mynd). Getum fundið $i$ með því að nota jafngildisviðnám

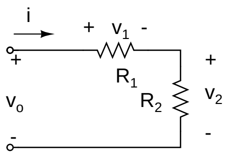
$$i = \frac{v_o}{R_{eq}} = \frac{v_o}{R_1 + R_2}$$

og síðan samkvæmt lögmáli Ohms

$$v_2 = iR_2 = v_o \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



# Spennudeiling




- Sjáum að $R_2/(R_1 + R_2) < 1$
- Þessi stærð segir til um hversu stórt hlutfall heildarspennunnar $v_o$ fellur yfir viðnámið $R_2$.
- Á sama hátt er

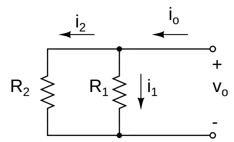
$$v_1 = v_o \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$\Longrightarrow$ Dæmi 2.8.

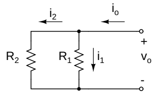


# Straumdeiling

- Höfum tvö samsíða tengd viðnám
- Heildarstraumur er $i_o$; viljum finna straum í hvoru viðnámi fyrir sig



# Straumdeiling




- Notum jafngildisviðnám

$$v = i_\text{o} R_\text{eq} = i_\text{o} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

samkvæmt lögmáli Ohms er

$$i_1 = \frac{v}{R_1} = i_\text{o} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

og

$$i_2 = i_\text{o} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

- Stærri hluti straumsins fer í gegnum minna viðnámið (minnsta viðnámið).



# Frekara lesefni

Lögmál Kirchhoffs er reifað í kafla 2.4 í kennslubók námskeiðsins (Nilsson and Riedel, 2004).

Raðtenging viðnáma er viðfangsefni kafla 3.1, hliðtenging í kafla 3.2, spennudeiling í kafla 3.3 og straumdeiling í 3.4. Svipaða umfjöllun er að finna í köflum 1.3 – 1.9 í bók Scott (1987) og í kafla 2 hjá DeCarlo and Lin (2001).

# References


DeCarlo, R. A. and P.-M. Lin (2001). *Linear Circuit Analysis: Time Domain, Phasor and Laplace Transform Approaches* (2 ed.). New York: Oxford University Press.

Nilsson, J. W. and S. A. Riedel (2004). *Electric Circuits* (7 ed.). Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall.

Scott, D. E. (1987). *An Introduction to Circuit Analysis - A Systems Approach*. New York: McGraw-Hill.