

## Mælitækni I:

# Jafngildisrásir búta

## Kaffi 6

Jón Tómas Guðmundsson

tumi@hi.is

5. september 2008

1

## Eiginleikar búta

Nær ómögulegt er að framleiða búta sem hafa aðeins einn eiginleika, viðnám rýmd eða span.

Til dæmis:

- Viðnám hefur alltaf launþátt
- Þéttir hefur lekaviðnám
- Spólu fylgir viðnám vírsins sem hún er vafin úr, sem er háð fjölda vafninga, og að auki er rýmd á milli vafninga

2

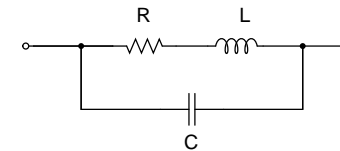
## Viðnám

- Algengast er að viðnám séu gerð úr heit pressuðum kolefnis kornum sem í er blandað fylliefnum af breytilegu magni þannig að fá megi mismunandi viðnámsgildi
- Nákvæmnismörk kolefnisviðnáma eru 5 – 20 %
- Þessi viðnám eru ódýr, áreiðanleg og tiltölulega laus við sníkjurýmd og span
- Viðnám vafin úr viðnámsvír eru einkum notuð þegar krafist er nákvæmra viðnáma, lágra viðnámsgilda eða afl er mikið
- Nákvæmnismörk vafinna viðnáma eru 0.01 – 1 %

3

## Viðnám

Viðnám eru gjarnan framleidd með því að vefja viðnámsvír á keffi. Þeim fylgir þess vegna alltaf span og einhver rýmd á milli vafninga.



Samviðnámið er gefið með

$$Z = \frac{(1/j\omega C)(R + j\omega L)}{R + j\omega L + (1/j\omega C)}$$
$$= \frac{R + j\omega(L - \omega^2 L^2 C - CR^2)}{1 + \omega^2 C^2 R^2 - 2\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2}$$

4

## Viðnám

Fyrir viðnám er gert ráð fyrir að span og rýmd séu litlar stærðir, svo  $\omega^2 LC \ll 1$  og  $\omega^4 C^2 L^2$  er óvera og þess vegna

$$Z = \frac{R + j\omega(L(1 - \omega^2 LC) - CR^2)}{1 + \omega^2 C(CR^2 - 2L)}$$

Ef  $Z$  er skipt upp í raunhluta og þverhluta fæst **virkt raunviðnám**

$$R_{\text{eff}} = \frac{R}{1 + \omega^2 C(CR^2 - 2L)}$$

og **virkt launviðnám**

$$X_{\text{eff}} = \frac{\omega[L(1 - \omega^2 LC) - CR^2]}{1 + \omega^2 C(CR^2 - 2L)}$$

5

## Viðnám

Þar sem  $X_{\text{eff}}$  er lítið og sleppa má  $\omega^2 LC$  þá er

$$X_{\text{eff}} = \frac{\omega[L - CR^2]}{1 + \omega^2 C(CR^2 - 2L)}$$

Fasahorn viðnáms má rita sem

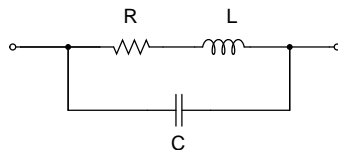
$$\tan \phi = \frac{X_{\text{eff}}}{R_{\text{eff}}} = \frac{\omega(L - CR^2)}{R} = \omega \left( \frac{L}{R} - CR \right)$$

og þar með er  $(L/R - CR)$  er tímafasti viðnáms.

6

## Spóla

Jafngildisrás spólu með loftkjarna er hin sama og fyrir viðnám nema hvað hlutfallslegar stærðir viðnáms, rýmdar og spans eru aðrar

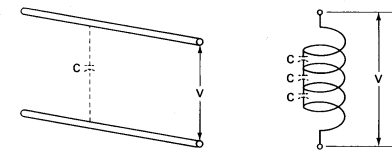


Fyrir miðlungs og lágur tíðnir gildir

$$Z = \frac{R + j\omega(L - \omega^2 L^2 C - CR^2)}{1 + \omega^2 CR^2 - 2\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2}$$

7

## Spóla



Nú er rýmd og viðnámi haldið í lágmarki svo að liðirnir  $\omega^2 C^2 R^2$  og  $CR^2$  eru óvera.

Þar með er samviðnámið

$$Z = \frac{R + j\omega L(1 - \omega^2 LC)}{1 - 2\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2}$$

8

## Spóla

Þá er virkt raunviðnám

$$R_{\text{eff}} = \frac{R}{(1 - \omega^2 LC)^2}$$

og virkt launviðnám

$$X_{\text{eff}} = \frac{\omega L(1 - \omega^2 LC)}{(1 - \omega^2 LC)^2}$$

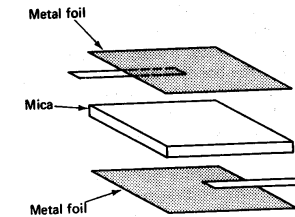
sem samsvarar virku spani

$$L_{\text{eff}} = \frac{L}{1 - \omega^2 LC}$$

Bæði virkt viðnám og virkt span spólu aukast með aukinni tíðni.

9

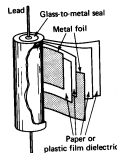
## Eiginleikar þétta



- Í mica þéttri situr mica filma á milli málmplaga
- Þeir hafa lága tapstuðla
- Rýmd þeirra liggur á bilinu 1 pF til 0.1  $\mu\text{F}$  og nákvæmni þeirra er  $\pm 1 - \pm 20 \%$

10

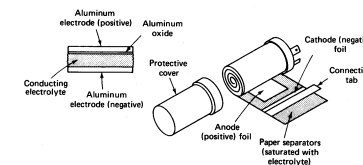
## Eiginleikar þétta



- Pappírþéttar eru ódýrir og algengir og geta staðist mikla spennuáráun
- Þá er hægt að fá með rýmdir á bilinu frá 500 pF upp í 50  $\mu\text{F}$
- Lekastraumar eru háir og nákvæmni léleg  $\pm 10 - \pm 20 \%$
- Oft er pappírinn vættur í olíu eða vaxi
- Plast-filmu þéttar eru byggðir upp svipað og pappírþéttar nema hvað plast filma er notuð sem rafsvari
- Þeir fást með rýmdir á bilinu 500 pF – 10  $\mu\text{F}$

11

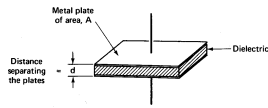
## Eiginleikar þétta



- Rafvökva þéttar eru byggðir úr áli eða tantal
- Á milli málmþynna er pappír sem vættur er leiðandi rafvökva
- Önnur málmþynnann hefur oxíðhúð sem snýr að rafvökvanum
- Þessu er síðan rúllað upp
- Þeir fást á bilinu 1 – 500000  $\mu\text{F}$
- Lekaviðnám rafvökvaþétta er frekar hátt eða af stærðargráðunni 1 M $\Omega$

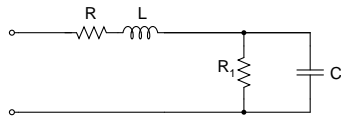
12

## Eiginleikar þétta



Áhrif tíðni á þétta eru með tvennum hætti

- Áhrif vegna tenginga við og innan þéttisins, sem lýst er með raðtengingu viðnáms og rýmdar
- Þá þarf að taka tillit til þess hvernig rafsvarinn svarar mismunandi tíðni. Því er lýst með viðnámi  $R_1$ , **lekaviðnámi þéttisins** sem breytist með tíðni



13

## Eiginleikar þétta

- Gerum nú ráð fyrir þétta sem sem vinnur við lága eða miðlungs tíðni. Þá má gera ráð fyrir að  $R_1$  sé fasti.
- Þá er

$$Z = R + j\omega L + \frac{R_1/(j\omega C)}{R_1 + (1/j\omega C)}$$

eða

$$Z = R + \frac{R_1}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2} + j\omega \left( L - \frac{CR_1^2}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2} \right)$$

Virkt launviðnám er gefið með  $1/(j\omega C_{\text{eff}})$  þar sem

$$\frac{1}{\omega C_{\text{eff}}} = -\omega L + \frac{\omega CR_1^2}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2}$$

eða

$$\omega C_{\text{eff}} = \frac{1 + \omega^2 R_1^2 C^2}{\omega CR_1^2 - \omega L(1 + \omega^2 R_1^2 C^2)}$$

14

## Eiginleikar þétta

- Ef  $\omega^2 R_1^2 C^2 \gg 1$  þá er

$$\omega C_{\text{eff}} = \frac{\omega C}{1 - \omega^2 CL}$$

- Virk rýmd við miðlungstíðni er þá

$$C_{\text{eff}} \approx C(1 + \omega^2 CL)$$

- Athuga ber að  $\omega = 1/(LC)^{1/2}$  er hermitíðni og þess vegna er mikilvægt að halda spani tenginga lágu svo að hermun verði við mjög háa tíðni.
- Virkt viðnám við miðlungstíðni er

$$R_{\text{eff}} = R + \frac{R_1}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2}$$

15

## Eiginleikar þétta

- Taphornið  $\delta$  er fundið með

$$\tan \delta = \frac{1}{\omega C_{\text{eff}} R_{\text{eff}}} = \frac{(\omega CR_1^2 - \omega L - \omega^3 R_1^2 C^2 L)}{R + \omega^2 R_1^2 RC + R_1}$$

- Skilgreindur er tapstuðull fyrir orku.

$$D = \frac{1}{\tan \delta}$$

16

## Eiginleikar þétta

- Við lága tíðni eru áhrif raðtengda viðnámsins  $R$  og spansins  $L$  óveruleg.
- Þá er virkt viðnám

$$R_{\text{eff}} = \frac{R_1}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2}$$

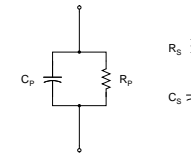
og virk rýmd

$$C_{\text{eff}} = C + \frac{1}{\omega^2 R_1^2 C}$$

- Þegar tíðni merkis sem lagt er yfir þétti er aukin fellur rýmdin og  $\tan \delta$  lítillega þar til áhrif spans tenginganna fer að gæta, þá eykst  $\tan \delta$  og virk rýmd þéttisins.
- $D$  liggur á bilinu 0.1 fyrir vökvaþétti til allt að  $10^{-4}$  fyrir þétti með fjölliðu rafsvara

17

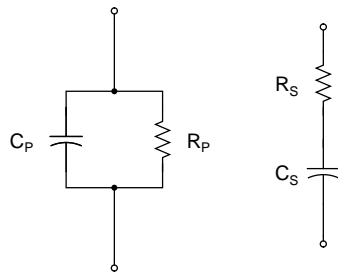
## Jafngildisrás þéttis



- Jafngildisrás þéttis samanstendur af hreinni rýmd  $C_P$  og samsíða tengdu viðnámi  $R_P$
- Hér er  $C_P$  raunveruleg rýmd þéttisins og  $R_P$  er viðnám rafsvarans, öðru nafni **lekaviðnám** þéttisins
- Fyrir þétta sem hafa lág gildi á  $R_P$  rennur mikill lekastraumur um rafsvarann
- Sem dæmi má nefna að rafvökva þéttar hafa tiltölulega mikinn lekastraum en plastþéttar hafa samsíðaviðnám af stærðargráðunni 100000 M  $\Omega$

18

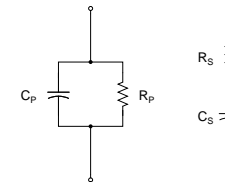
## Jafngildisrás þéttis



- Samsíða  $RC$  rásin hefur raðtengda jafngildisrás
- Hvara rásina sem vera vill má nota til að lýsa þétti í rás
- Betra er að lýsa þéttum með háviðnáms rafsvara með raðtengdri  $RC$  rás

19

## Jafngildisrás þéttis



- Tvinnviðnámið í raðtengdu rásinni er

$$Z_S = R_S - jX_S$$

- Á sama hátt er tvinn leiðnin

$$Y_S = \frac{1}{R_S} + j\frac{1}{X_S} = G_P + jB_P$$

þar sem  $G_P$  er raunleiðni og  $B_P$  er launleiðni

20

## Jafngildisrás þéttis

- Tvinnleiðni beggja rásanna verður að vera jafngild eða

$$Z_S = \frac{1}{Y_P}$$

sem gefur

$$R_S - jX_S = \frac{1}{G_P + jB_P}$$

eða

$$G_P + jB_P = \frac{1}{R_S - jX_S} = \frac{R_S + jX_S}{R_S^2 + X_S^2}$$

- Einangrum raunhlutann

$$G_P = \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2}$$

eða

$$R_P = \frac{R_S^2 + X_S^2}{R_S}$$

- Á sama hátt er þverhlutinn

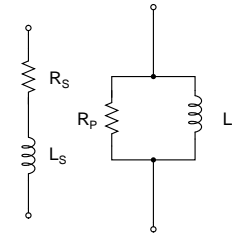
$$B_P = \frac{X_S}{R_S^2 + X_S^2}$$

eða

$$X_P = \frac{R_S^2 + X_S^2}{X_S}$$

21

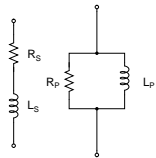
## Jafngildisrás spólu



- Raðtengd jafngildisrás spólu lýsir spólu með span  $L_S$  raðtengdri við raunviðnám spólunnar  $R_S$
- Raðtenging spólu og þéttis er að jafnaði heppilegasta rásin til að lýsa spólu

22

## Jafngildisrás spólu



- Tvinn viðnám raðtendu rásarinnar er

$$Z_S = R_S + jX_S$$

- Á sama hátt er tvinn leiðnin í samsíða rásinni

$$Y_P = \frac{1}{R_S} - j\frac{1}{X_S} = G_P - jB_P$$

þar sem  $G_P$  er raunleiðni og  $B_P$  er launleiðni

23

## Jafngildisrás spólu

- Tvinnviðnám beggja rásanna verður að vera jafngilt

$$Z_S = Z_P$$

sem gefur

$$R_S + jX_S = \frac{1}{G_P - jB_P} = \frac{G_P + jB_P}{G_P^2 + B_P^2}$$

- Raunhlutarnir gefa

$$R_S = \frac{G_P}{G_P^2 + B_P^2}$$

eða

$$R_S = \frac{R_P X_P^2}{R_P^2 + X_P^2}$$

- Á sama hátt er þverhlutinn

$$X_S = \frac{B_P}{G_P^2 + B_P^2}$$

eða

$$X_S = \frac{R_P^2 X_P}{X_P^2 + R_P^2}$$

24

## Q-gildi spólu

- Gæðastuðull spólu er skilgreindur út frá aftapi í spólunni
- Venjuleg spóla hefur alltaf eitthvað viðnám í vindingum og þess vegna verða þar aftöþ
- **Gæðastuðull** eða **Q-stuðull** spólu er skilgreindur sem hlutfall launviðnáms og raunviðnáms við tiltekna tíðni eða

$$Q = \frac{X_S}{R_S} = \frac{\omega L_S}{R_S}$$

þar sem  $L_S$  og  $R_S$  eru span og viðnám í raðtengdri jafngildisrás

- Fyrir dæmigerðar spólur liggur Q-gildið á bilinu 5 til 1000 og er háð tíðni
- Þegar samsíða jafngildisrás er notuð er Q-gildið þá er

$$Q = \frac{R_P}{X_P} = \frac{R_P}{\omega L_P}$$

25

## D-gildi þéttis

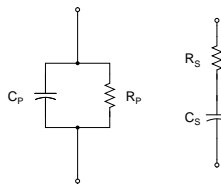
- Gæði þéttis eru skilgreind út frá því afli sem í honum eyðist
- Hreinn þéttir hefur hátt rafsvaaviðnám og nær ekkert afl eyðist í honum
- Tapstuðull þéttis  $D$  skilgreinir gæði þéttis
- $D$  er skilgreint sem launviðnám bútsins á móti raunviðnámi eða í samsíða jafngildisrás

$$D = \frac{X_P}{R_P} = \frac{1}{\omega C_P R_P} = \frac{1}{\tan \delta}$$

- Heppilegast er að  $R_P \gg 1/(\omega C_P)$  þannig að  $D$  sé lítið
- $D$  liggur í bilinu 0.1 í rafvökva þéttum og niður í  $10^{-4}$  í plastþéttum og er tíðniháð

26

## D-gildi þéttis



- Þegar raðtengd jafngildisrás er notuð þá er tapstuðullinn

$$D = \frac{R_S}{X_S} = \omega C_S R_S$$

⇒ Dæmi 6.1.

27

## Frekara lesefni

Um viðnám og viðnámsmælingar er fjallað í Wolf and Smith (2003, kafli 10) og um þétta og spólur og mælingar á rýmd og spani er fjallað í Wolf and Smith (2003, kafli 11). Jafngildisrásir fyrir búta eru reifaðar hjá Gregory (1981, bls. 336 – 340). Um gæðastuðla spólu og tapstuðla þétta má lesa í Bell (1994, kafli 8.1.).

## References

- Bell, D. A. (1994). *Electronic Instrumentation and Measurements*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall.
- Gregory, B. A. (1981). *Introduction to Electrical Instrumentation and Measurement Systems* (2 ed.). Houndmills, UK: Macmillan.
- Wolf, S. and R. F. M. Smith (2003). *Student Reference Manual for Electronic Instrumentation Laboratories* (2 ed.). Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall.

28